PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

9 KWIETNIA 2016

CZAS PRACY: 90 MINUT

ZADANIE 1 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Różnica między największą i najmniejszą spośród liczb:

$$-\frac{5}{4};\ \frac{10}{3};\ 2\sqrt{2};\ -\frac{\pi}{2};\ \sqrt[3]{25};\ -1,2$$

jest równa
A) $\frac{10}{3}+\frac{\pi}{2}$ B) $\sqrt[3]{25}+\frac{\pi}{2}$ C) $\sqrt[3]{25}+\frac{5}{4}$ D) $2\sqrt{2}+\frac{5}{4}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\frac{10}{3} > \frac{9}{3} = 3$$
$$2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$$
$$\sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3.$$

Największą z podanych liczb jest więc $\frac{10}{3}$. Patrzymy teraz na liczby ujemne.

$$-\frac{5}{4} = -\frac{2,5}{2} = -1,25$$
$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{3}{2} = -1,5.$$

Najmniejszą z podanych liczb jest więc $-\frac{\pi}{2}$ i interesująca nas różnica jest równa

$$\frac{10}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{10}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Zaznacz dobrą odpowiedź.
Liczbą podzielną przez 36 jest
A) 345222 B) 986472 C) 322144 D) 631422

ROZWIĄZANIE

Jeżeli liczba ma się dzielić przez $36 = 9 \cdot 4$, to musi się dzielić przez 9 i przez 4. Podzielność przez 9 oznacza, że suma cyfr takiej liczby musi się dzielić przez 9. Łatwo sprawdzić, że warunek ten spełniają liczby: 345222, 986472, 631422.

Podzielność przez 4 oznacza, że liczba utworzona z ostatnich dwóch cyfr danej liczby jest podzielna przez 4. Wśród wyżej wypisanych 3 liczb tylko 986472 spełnia ten warunek.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Na osi liczbowej liczba równa wartości wyrażenia arytmetycznego $\left(1 - \frac{5}{8}\right) - 0,2$ znajduje się między

A) -1 i $-0,5$ B) $-0,5$ i 0 C) 0 i 0,5 D) 0,5 i 1

ROZWIĄZANIE

Obliczamy dane wyrażenie.

$$\left(1 - \frac{5}{8}\right) - 0,2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5} = \frac{15}{40} - \frac{8}{40} = \frac{7}{40}.$$

Liczba ta znajduje się na osi pomiędzy 0 i 0,5.

Odpowiedź: **C**

FORUM.ZADANIA.INFO

ZADANIE 4 (1 PKT)

Ile jest liczb całkowitych, dla których wyrażenie $\sqrt[3]{x^2 - 10}$ nie może być obliczone w zbiorze liczb rzeczywistych?

A) 0 B) 3 C) 6 D) 7

ROZWIĄZANIE

Pierwiastek stopnia 3 można wyciągnąć z dowolnej liczby rzeczywistej, więc dane wyrażenie może być obliczone dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Na tablicy zaczęto wypisywać kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3.

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ldots$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Cyfrą jedności dwusetnej z napisanych liczb jest
A) 3 B) 7 C) 5 D) 9

ROZWIĄZANIE

Wypiszmy jeszcze kilka kolejnych liczb

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31,\ 35,\ 39,\ 43,\ 47,\ 51\ldots$$

Łatwo teraz zauważyć, że cyfry jedności wypisywanych liczb powtarzają się co 5. W takim razie cyfra jedności liczby o numerze 200 będzie taka sama jak cyfra jedności liczby o numerze

$$200-195=200-5\cdot 39=5,$$

czyli będzie to 9.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Powierzchnia 50 km^2 jest równa
A) $5\cdot 10^7$ m^2 B) $5\cdot 10^6$ m^2 C) $5\cdot 10^3$ m^2 D) $5\cdot 10^4$ m^2

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} 50\text{ km}^2 &= 50\cdot(1000\text{ m})^2 = 50\cdot(10^3\text{ m})^2 = 50\cdot 10^6\text{ m}^2 = \\ &= 5\cdot 10\cdot 10^6\text{ m}^2 = 5\cdot 10^7\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Zmieszano dwa gatunki kawy, droższą i tańszą, w stosunku 1:4. Cena jednego kilograma tej mieszanki kaw wynosi 110 zł. Gdyby te kawy zmieszano w stosunku 2:3, to cena za 1 kg tej mieszanki wynosiłaby 120 zł. Na podstawie podanych informacji zapisano poniższy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{4}{5}y=110 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y=120. \end{cases}$$

Co oznacza y w tym układzie równań? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A) Cenę 1 kg kawy droższej.
B) Cenę 1 kg kawy tańszej.
C) Cenę 5 kg kawy droższej.
D) Cenę 5 kg kawy tańszej.

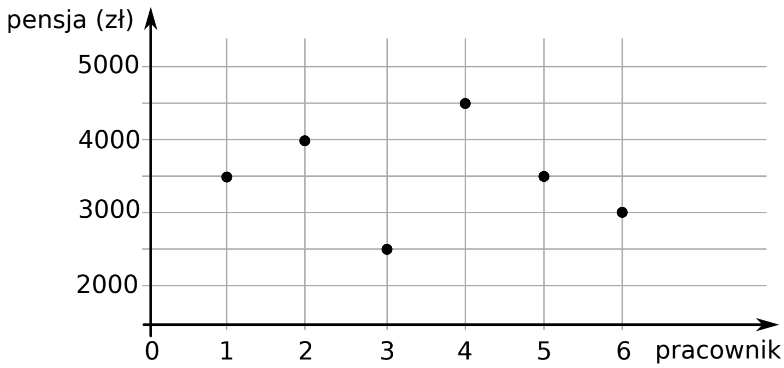
ROZWIĄZANIE

Pierwsze równanie układu zawiera informację o cenie 1 kilograma mieszanki sporządzonej w stosunku 1:4 – w równaniu tym $\frac{1}{5}x$ oznacza koszt droższej kawy, a $\frac{4}{5}y$ koszt tańszej kawy. W szczególności y oznacza cenę jednego kilograma tańszej kawy.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Na wykresie przedstawiono wysokość zarobków 6 pracowników pewnego przedsiębiorstwa.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli każdy z pierwszych 3 pracowników otrzyma 10% podwyżkę, to łącznie będą zarabiać więcej niż w sumie zarabiają pracownicy nr 4, 5 i 6.	**P**	**F**
Zarobki pracownika nr 5 są o 36% wyższe od zarobków pracownika nr 3.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Łączne zarobki pierwszych trzech pracowników wynoszą

$$3500 + 4000 + 2500 = 10000.$$

Po podwyżce o 10% będą więc one równe

$$10000 \cdot 1,1 = 11000.$$

Obliczmy jeszcze łączne zarobki trzech pozostałych pracowników

$$4500 + 3500 + 3000 = 11000.$$

Jest to więc dokładnie tyle samo, ile suma zarobków pierwszych trzech pracowników po otrzymanej przez nich podwyżce.

Obliczamy teraz jaką część zarobków 3 pracownika stanowią zarobki pracownika nr 5.

$$\frac{3500}{2500} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4 = 140\%.$$

Zarobki pracownika nr 5 są więc o 40% wyższe.

Odpowiedź: **F, F**

Materiał pobrany z serwisu www.zadania.info

Informacja do zadań 9 i 10

Jedną z jednostek używanych do mierzenia kątów są grady. Tworząc te jednostki dzielimy kąt pełny na 400 gradów.

ZADANIE 9 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Miara w stopniach kąta o mierze 220 gradów jest równa

A) 198° B) 200° C) 189° D) 212°

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że 1 grad to

$$\frac{1}{400}\cdot 360^\circ = \frac{1}{40}\cdot 36^\circ = \frac{1}{10}\cdot 9^\circ.$$

W takim razie miara w stopniach kąta o mierze 220 gradów jest równa

$$220\cdot\frac{1}{10}\cdot 9^\circ = 22\cdot 9^\circ = 198^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Kąt prosty wyrażony w gradach to

A) 150 gradów B) 200 gradów C) 100 gradów D) 50 gradów

ROZWIĄZANIE

Kąt prosty to $\frac{1}{4}$ kąta pełnego, więc jest to 100 gradów.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Pięć różnych liczb naturalnych zapisano w kolejności od najmniejszej do największej: $1, a, b, c, 10$.
Mediana liczb: $1, a, b, c$ jest równa 3, a mediana liczb: $b, c, 10$ jest równa 8.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba b jest równa

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

ROZWIĄZANIE

Jeżeli mediana liczb $b, c, 10$ jest równa 8, to $c = 8$. Wiemy ponadto, że mediana liczb $1, a, b, c$ jest równa 3, czyli

$$\frac{a+b}{2} = 3 \quad\Rightarrow\quad a+b = 6.$$

Wiemy ponadto, że $1 < a < b < 8$. Jedyne liczby naturalne spełniające te dwa warunki, to $a = 2$ i $b = 4$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dwa kąty trójkąta ABC mają miary 35° i 60°.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Trójkąt podobny do trójkąta ABC może mieć kąty o miarach
A) 85° i 40° B) 35° i 80° C) 60° i 85° D) 80° i 40°

ROZWIĄZANIE

Trzeci kąt trójkąta ABC ma miarę

$$180^\circ - 35^\circ - 60^\circ = 85^\circ.$$

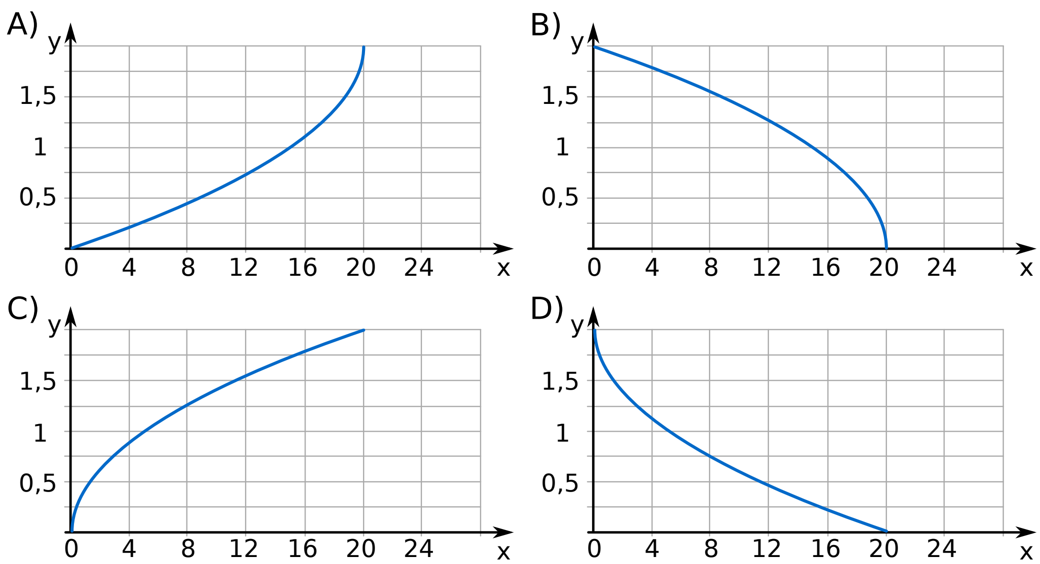
Trójkąty podobne mają równe kąty, więc trójkąt podobny do trójkąta ABC musi mieć kąty o miarach

$$35^\circ,\ 60^\circ, 85^\circ.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Piłkę tenisową puszczono swobodnie z pewnej wysokości. Wzór $x = 20 - 5y^2$ opisuje zależność wysokości x (w metrach) na jakiej znajduje się piłka od czasu y (w sekundach), który upłynął od momentu puszczenia piłki. **Który wykres przedstawia tę zależność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**



ROZWIĄZANIE

Dany wzór oznacza, że w chwili 0 (czyli dla $y = 0$) piłka znajduje się na wysokości 20 metrów. W chwili $y = 2$ (czyli po dwóch sekundach) mamy

$$x = 20 - 5 \cdot 2^2 = 0,$$

czyli piłka znajduje się na poziomie ziemi. Taką sytuację opisują wykresy B i D. Aby ustalić, który z nich jest poprawny liczymy jeszcze na jakiej wysokości znajduje się piłka po 1 sekundzie (czyli dla $y = 1$). Mamy wtedy

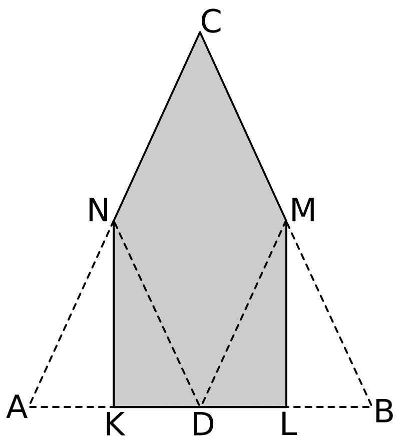
$$x = 20 - 5 = 15.$$

Taka sytuacja ma miejsce tylko na wykresie B.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Łukasz wyciął z kartki papieru trójkąt równoramienny ABC, a następnie zagiął w nim dwa narożniki tak, że wierzchołki A i B trójkąta znalazły się w środku D jego podstawy. Powstał w ten sposób pięciokąt $KLMCN$.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Pole pięciokąta $KLMCN$ stanowi 75% pola trójkąta ABC.	**P**	**F**
Obwód pięciokąta $KLMCN$ jest taki sam jak obwód trójkąta ABC.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Aby obliczyć pole pięciokąta $KLMCN$ zauważmy, że powstał on z trójkąta ABC poprzez odcięcie dwóch przystających trójkątów prostokątnych AKN. Każdy z tych trójkątów jest podobny do trójkąta ADC w skali 1:2, więc pole każdego z nich jest równe

$$P_{AKN} = P_{BLM} = \frac{1}{4}P_{ADC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{8}P_{ABC}.$$

W takim razie pole pięciokąta $KLMCN$ jest równe

$$P_{KLMCN} = P_{ABC} - 2P_{AKN} = P_{ABC} - \frac{1}{4}P_{ABC} = \frac{3}{4}P_{ABC} = 75\%P_{ABC}.$$

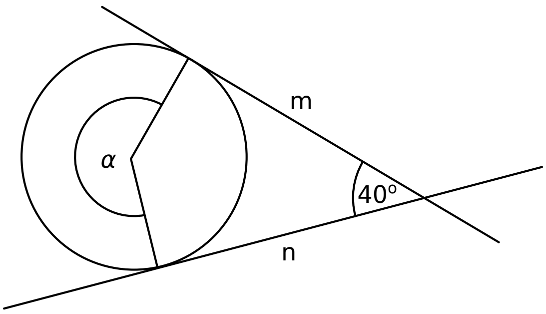
Jeżeli chodzi natomiast o obwód pięciokąta $KLMCN$, to jest on wyraźnie mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

$$CN + NK + KL + LM + MC < CN + NA + AB + BM + MC = CA + AB + BC.$$

Odpowiedź: **P, F**

Zadanie 15 (1 pkt)

Proste m i n są styczne do okręgu i przecinają się pod kątem 40°.

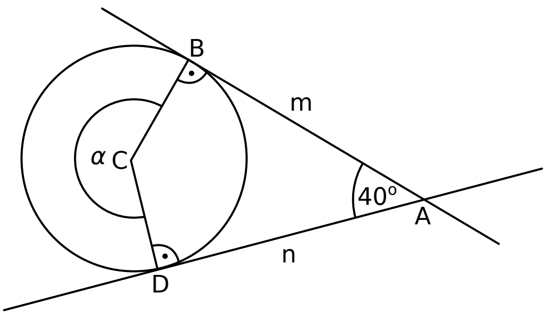


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miara kąta α jest równa

A) 210° B) 220° C) 240° D) 270°

Rozwiązanie

Podpiszmy punkty zaznaczone na rysunku literkami.



Styczne do okręgu są prostopadłe do promieni łączących punkty styczności ze środkiem okręgu, więc

$$\measuredangle CBA = \measuredangle CDA = 90^\circ.$$

Suma miar kątów w czworokącie $ABCD$ jest równa 360°, więc

$$\measuredangle BCD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Zatem

$$\measuredangle\alpha = 360^\circ - \measuredangle BCD = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Pole działki budowlanej jest równe 2 hektary. Pole powierzchni tej działki na planie wykonanym w skali 1:200 wynosi:

A) 100 cm^2 B) 500 cm^2 C) 5000 cm^2 D) 1000 cm^2

ROZWIĄZANIE

Pole zmienia się jak kwadrat skali podobieństwa, więc pole powierzchni działki będzie równe

$$\frac{1}{200^2} \cdot 2 \text{ ha} = \frac{1}{40000} \cdot 20000 \text{ m}^2 = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \text{ cm}^2 = 5000 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: **C**

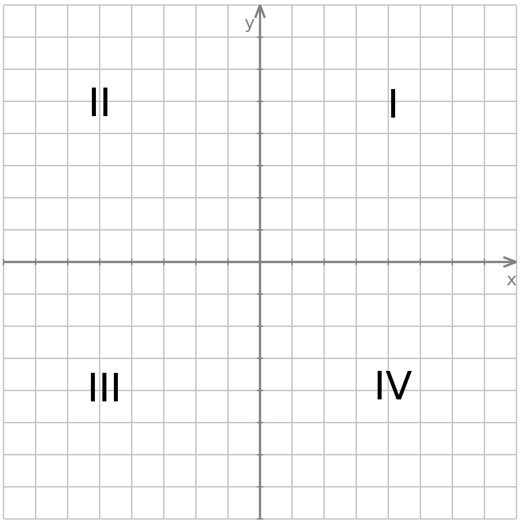
ZADANIE 17 (1 PKT)

W układzie współrzędnych zaznaczono wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$: $A = (-25, 2)$, $B = (-15, -2)$, $C = (-6, 7)$, $D = (-4, -8)$, $E = (30, -18)$, $F = (-42, -15)$. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Trzy wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$ znajdują się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych.	**P**	**F**
Dwa wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$ znajdują się w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

W drugiej ćwiartce układu współrzędnych znajdują się punkty, których pierwsza współrzędna jest ujemna, a druga dodatnia.



Wśród podanych punktów są dwa takie punkty: $A = (-25, 2)$ i $C = (-6, 7)$.

W trzeciej ćwiartce układu współrzędnych znajdują się punkty, których obie współrzędne są ujemne. Wśród podanych punktów są trzy takie punkty: $A = (-15, -2)$, $B = (-4, -8)$, $F = (-42, -15)$.

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Do pudełka włożono 48 kul w różnych kolorach. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{1}{6}$, a prawdopodobieństwo wylosowania kuli żółtej jest równe $\frac{1}{2}$. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

W pudełku jest trzy więcej kul czerwonych niż żółtych.	**P**	**F**
W pudełku może być 16 kul zielonych.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Podane prawdopodobieństwa oznaczają, że w pudełku jest 8 kul czerwonych i 24 żółte. W szczególności kul żółtych jest 3 razy więcej niż kul czerwonych.

Jeżeli wszystkie pozostałe kule są zielone, to jest ich

$$48 - 24 - 8 = 16.$$

Odpowiedź: **F, P**

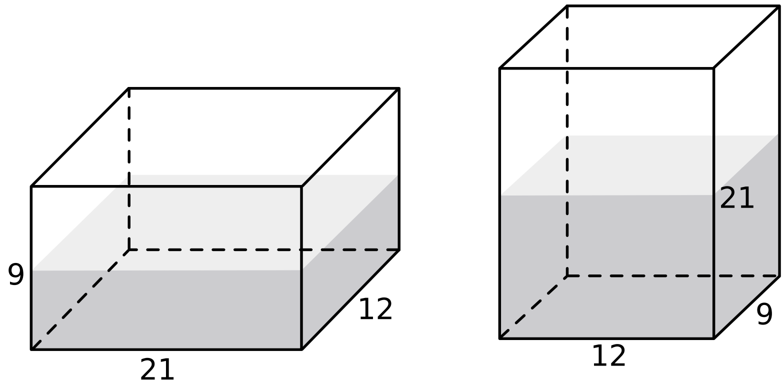
ZADANIE 19 (1 PKT)

Szklane naczynie w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 9 cm, 12 cm i 21 cm napełniono częściowo wodą i szczelnie zamknięto. Następnie naczynie postawiono na jego ścianie o największej powierzchni i wtedy woda sięgała do wysokości 6 cm.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kiedy naczynie postawiono na ścianie o najmniejszej powierzchni, to woda sięgała do wysokości

A) 8 cm B) 10 cm C) 12 cm D) 14 cm

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy prostopadłościan.



Zauważmy, że największa ściana prostopadłościanu ma wymiary: 12 cm i 21 cm, więc wody w naczyniu jest

$$12 \cdot 21 \cdot 6 \text{ cm}^3.$$

Jeżeli teraz postawimy naczynie na ścianie o najmniejszym polu powierzchni, czyli na ścianie o wymiarach 9 cm i 12 cm, oraz przez x oznaczymy wysokość wody w tym ustawieniu naczynia, to mamy

$$9 \cdot 12 \cdot x = 12 \cdot 21 \cdot 6 \quad / : 9 \cdot 12$$
$$x = 7 \cdot 2 = 14.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Promień kuli jest równy $R = 6$ cm. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Objętość tej kuli jest równa 288π.	**P**	**F**
Pole powierzchni tej kuli jest równe 72π.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Liczymy objętość i pole powierzchni kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 4 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6^2 = 288\pi$$
$$P = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi.$$

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 21 (3 PKT)

Miejscowości A i B są połączone linią kolejową. Pociąg przebywa trasę z A do B ze średnią prędkością 80 km/h. W drodze powrotnej średnia prędkość pociągu jest większa o 20 km/h i dzięki temu pociąg pokonuje trasę od B do A w czasie o godzinę krótszym. Jaka jest długość linii kolejowej między miejscowościami A i B?

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez s długość linii kolejowej między A i B, a przez t czas w jakim pociąg pokonuje trasę z A do B. Wiemy zatem, że $s = 80t$, czyli $t = \frac{1}{80}s$.

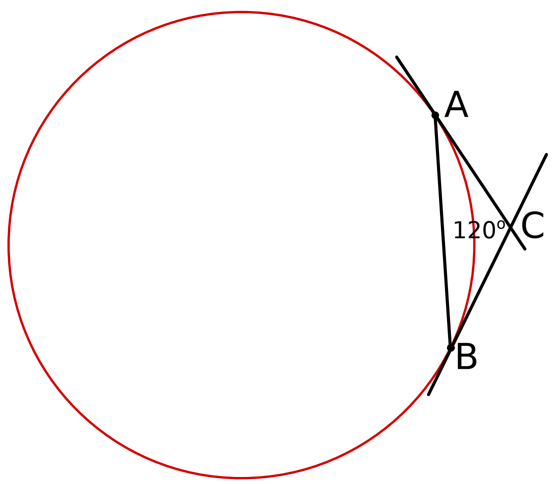
Zapiszmy teraz drugą informację opisującą drogę powrotną pociągu z B do A.

$$s = (80+20)\cdot(t-1)$$
$$s = 100t - 100$$
$$s = 100 \cdot \frac{1}{80}s - 100$$
$$100 = \frac{5}{4}s - s$$
$$100 = \frac{1}{4}s \quad \Rightarrow \quad s = 400.$$

Odpowiedź: **400 km**

ZADANIE 22 (3 PKT)

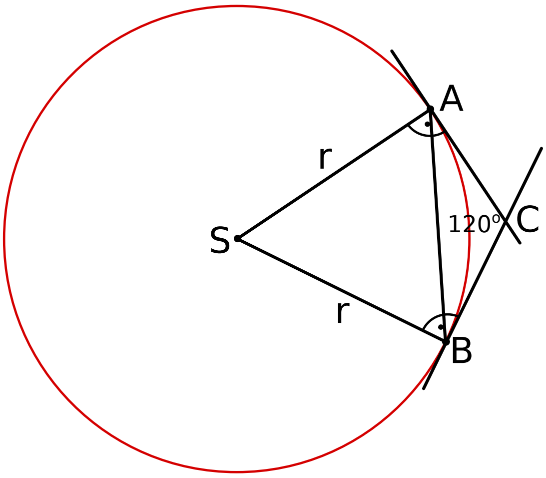
Przez punkty A i B okręgu poprowadzono styczne, które przecięły się w punkcie C.



Wykaż, że jeżeli $|\measuredangle ACB| = 120^\circ$, to cięciwa AB ma długość równą długości promienia okręgu.

ROZWIĄZANIE

Połączmy punkty A i B ze środkiem okręgu S.



Ponieważ promień łączący środek okręgu z punktem styczności jest prostopadły do stycznej, dwa kąty czworokąta $ASBC$ są proste. W takim razie

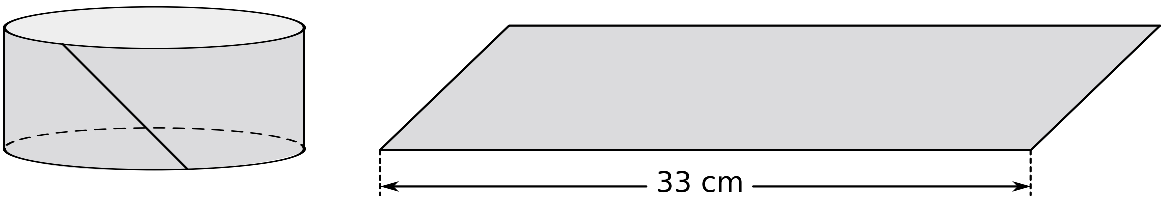
$$\measuredangle ASB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Patrzymy teraz na trójkąt ASB – jest on równoramienny oraz kąt między jego ramionami jest równy 60°. Jest to więc trójkąt równoboczny. W szczególności

$$AB = SB = SA = r.$$

ZADANIE 23 (4 PKT)

Po rozklejeniu ściany bocznej pudełka mającego kształt walca otrzymano równoległobok. Jeden z boków tej figury ma długość 33 cm, a jej pole jest równe 132 cm^2. Oblicz objętość tego pudełka. Przyjmij przybliżenie π równe $\frac{22}{7}$. Zapisz obliczenia.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy promień podstawy walca przez r, a jego wysokość przez H. Długość dłuższego boku równoległoboku to dokładnie długość okręgu w podstawie walca, czyli

$$2\pi r = 33 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{33}{2\pi}.$$

Wysokość walca jest równa wysokości równoległobku, więc możemy ją obliczyć z podanego pola równoległoboku.

$$33 \cdot H = 132 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{132}{33} = \frac{12}{3} = 4.$$

Objętość walca jest więc równa

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot \frac{33^2}{4\pi^2} \cdot 4 = 33^2 \cdot \frac{1}{\pi} \approx 33^2 \cdot \frac{7}{22} = 33 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{693}{2} = 346,5.$$

Odpowiedź: $346,5$ **cm**^{3}