PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

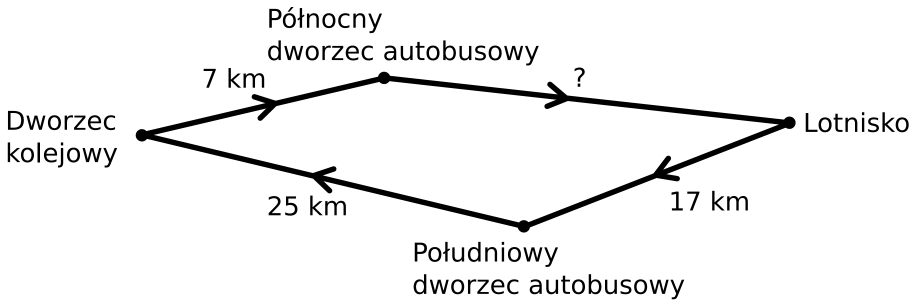
WWW.ZADANIA.INFO

2 KWIETNIA 2016

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

Pomiędzy dworcem kolejowym i lotniskiem kursują pociągi według schematu przedstawionego na rysunku. Pociągi te poruszają się ze średnią prędkością 72 km/h.



ZADANIE 1 (1 PKT)

Jak długo trwa przejazd pociągu jadącego z lotniska do dworca kolejowego? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) 40 minut B) 36 minut C) 30 minut D) 35 minut

ROZWIĄZANIE

Pociąg jadący z lotniska do dworca kolejowego pokonuje dystans

$$17 + 25 = 42 \text{ kilometrów.}$$

Na pokonanie tego dystansu potrzebuje

$$\frac{42}{72} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

godziny, czyli

$$\frac{7}{12} \cdot 60 = 35$$

minut.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Z północnego dworca autobusowego pociąg wyjeżdża o godz. 14:23, a godz. 14:33 wyjeżdża drugi pociąg z lotniska. Oba pociągi w tym samym czasie dojeżdżają do swoich kolejnych stacji, tzn. pierwszy pociąg do lotniska, a drugi pociąg do południowego dworca autobusowego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość między północnym dworcem autobusowym i lotniskiem jest równa

A) 30 km B) 29 km C) 32 km D) 28 km

ROZWIĄZANIE

Pierwszy pociąg jedzie do swojej kolejnej stacji o 10 minut dłużej, niż drugi pociąg. Przez 10 minut przejeżdża on

$$\frac{1}{6} \cdot 72 = 12 \text{ km}.$$

To oznacza, że odległość pomiędzy północnym dworcem autobusowym i lotniskiem jest równa

$$17 + 12 = 29 \text{ km}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba 16 razy większa od 8^{12} jest równa

A) 4^{40} B) 4^{20} C) 2^{19} D) 2^{38}

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$16 \cdot 8^{12} = 2^4 \cdot (2^3)^{12} = 2^4 \cdot 2^{36} = 2^{40} = (2^2)^{20} = 4^{20}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Dane jest przybliżenie $\sqrt{8} \approx 2,828$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

$\sqrt{200} \approx 28,28$	**P**	**F**
$\sqrt{32} \approx 4 \cdot 2,828$	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt{200} = \sqrt{25\cdot 8} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{8} = 5\sqrt{8} = 5\cdot 2,828 \neq 28,28$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{4\cdot 8} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{8} = 2\sqrt{8} \approx 2\cdot 2,828.$$

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Jacek ma o 4 lata młodszego brata Kamila, który ma x lat. Kamil ma koleżankę Basię, która jest od niego dwa razy starsza. **Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Różnica wieku Basi i Jacka jest równa**

A) $x+4$ B) $x-4$ C) x D) $2x-4$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli Kamil ma x lat, to Jacek ma $x+4$ lata, a Basia ma $2x$ lat. Różnica wieku Basi i Jacka jest więc równa

$$2x-(x+4) = 2x-x-4 = x-4.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 6 (1 PKT)

W dodatniej liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest średnią arytmetyczną jej pozostałych dwóch cyfr, a iloczyn cyfr setek i jedności jest równy 12. **Ile jest liczb spełniających te warunki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) Jedna. B) Dwie. C) Trzy. D) Cztery.

ROZWIĄZANIE

Zastanówmy się najpierw jakie mogą być cyfry setek i jedności tej liczby. Ich iloczyn ma być równy 12, więc mogą to być

$$\begin{array}{ccc} 2 & \text{i} & 6 \\ 3 & \text{i} & 4 \\ 4 & \text{i} & 3 \\ 6 & \text{i} & 2. \end{array}$$

Zauważmy jednak, że suma cyfr jedności i setek musi być parzysta tak, aby cyfra dziesiątek mogła być ich średnią. Są więc tylko 2 możliwości: 256 i 652.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Do 200 ml soku dolano 0,3 litra wody. **Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Stężenie soku w otrzymanym napoju jest równe**

A) 66% B) 40% C) 150% D) 60%

ROZWIĄZANIE

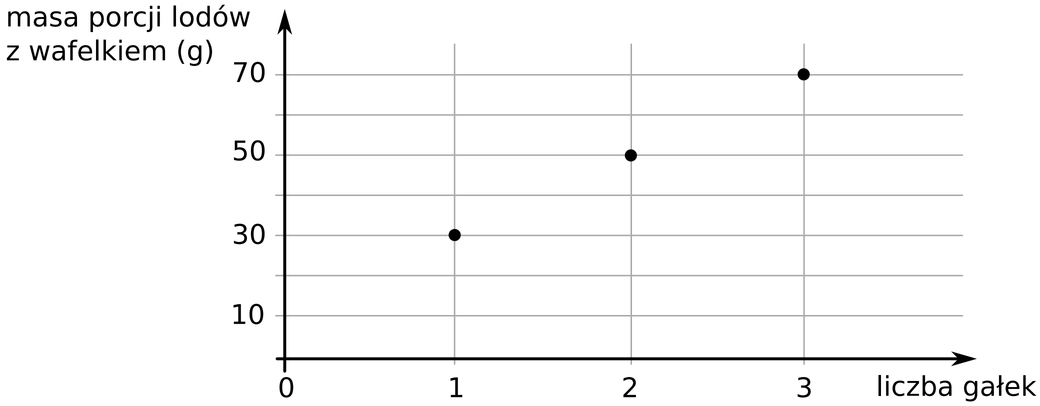
Ponieważ 1 litr to 1000 mililitrów, to stężenie otrzymanego napoju jest równe

$$\frac{200}{0,3\cdot 1000+200}=\frac{200}{500}=\frac{2}{5}=0,4=40\%.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 8 (1 PKT)

Na wykresie przedstawiono, jak zmienia się masa porcji lodów z wafelkiem w zależności od liczby gałek lodów.



Jaką masę ma wafelek? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) 10 g B) 20 g C) 30 g D) 40 g

ROZWIĄZANIE

Z wykresu widzimy, że dołożenie jednej gałki lodów sprawia, że lody z wafelkiem stają się cięższe o

$$50-30=20 \text{ g}.$$

Tyle więc waży jedna gałka lodów. Sam wafelek waży więc

$$30-20=10 \text{ g}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 9 (1 PKT)

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} \frac{15}{137}y - \frac{259}{137}x = 2 \\ \frac{137}{259}x + \frac{396}{259}y = 1 \end{cases}$ jest para liczb

A) $x = 1$ i $y = -1$ B) $x = 1$ i $y = 1$ C) $x = -1$ i $y = 1$ D) $x = -1$ i $y = -1$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że drugie równanie nie może być spełnione, gdy $x = y = -1$ (bo wtedy lewa strona byłaby ujemna). Nie jest też spełnione przez $x = y = 1$, bo wtedy lewa strona jest wyraźnie większa od 1. Wystarczy teraz jeszcze zauważyć, że pierwsze równanie nie może być spełnione przez $y = -1$ i $x = 1$, bo wtedy lewa strona jest ujemna. Rozwiązaniem musi więc być $x = -1$ i $y = 1$. Łatwo sprawdzić, że rzeczywiście tak jest.

$$\begin{cases} \frac{15}{137} + \frac{259}{137} = \frac{274}{137} = 2 \\ -\frac{137}{259} + \frac{396}{259} = \frac{259}{259} = 1. \end{cases}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Jeśli wypadnie orzeł, zapisujemy 5, a jeśli reszka – zapisujemy 4. Wynikiem doświadczenia jest zapisana liczba trzycyfrowa. **Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisana liczba jest podzielna przez 6? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{4}$

ROZWIĄZANIE

W wyniku opisanego doświadczenia możemy otrzymać 8 liczb:

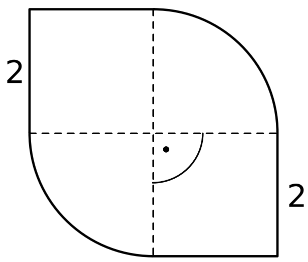
$$444,\ 445,\ 454,\ 544$$
$$455,\ 545,\ 554,\ 555.$$

Liczba podzielna przez 6 musi być parzysta i suma jej cyfr musi dzielić się przez 3. Na powyższej liście jest tylko jedna taka liczba: 444. Prawdopodobieństwo jest więc równe $\frac{1}{8}$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Narysowana poniżej figura składa się z dwóch kwadratów o boku 2 i dwóch ćwiartek koła.



Obwód tej figury jest równy

A) $2\pi + 8$ B) $4\pi + 8$ C) $\pi + 4$ D) $\pi + 8$

ROZWIĄZANIE

Długość 2 ćwiartek okręgu jest równa

$$\frac{2}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi.$$

Do tego trzeba dodać długości czterech boków kwadratu. Obwód jest więc równy

$$2\pi + 8.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 12 (1 PKT)

Liczba x jest ujemna, a liczba y jest dodatnia.
Ile spośród liczb: $x \cdot y,\ x - y,\ \frac{x}{y},\ (y-x)^2$ jest ujemnych? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A) Jedna. B) Dwie. C) Trzy. D) Cztery.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli $x < 0$ i $y > 0$, to

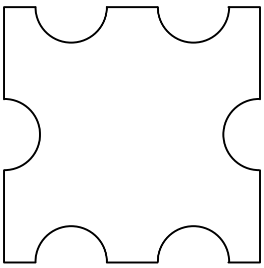
$$\begin{aligned} & xy < 0 \\ & x - y = x + (-y) < 0 \\ & \frac{x}{y} < 0 \\ & (y-x)^2 > 0. \end{aligned}$$

Wśród podanych liczb są więc 3 liczby ujemne.

Odpowiedź: C

ZADANIE 13 (1 PKT)

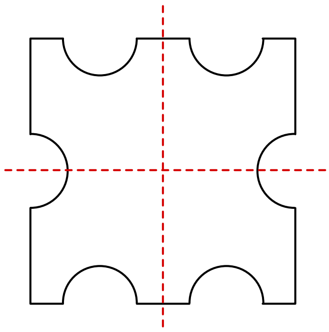
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Liczba osi symetrii figury przedstawionej na rysunku jest równa



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

ROZWIĄZANIE

Narysowana figura ma 2 osie symetrii.



Odpowiedź: **B**

Informacja do zadań 14 i 15

Jeżeli a, b, c i d są długościami kolejnych boków czworokąta, to przekątne tego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

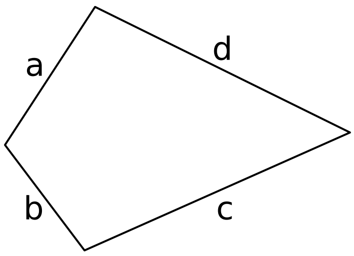
ZADANIE 14 (1 PKT)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Czworokąt, którego dwa przeciwległe boki mają długości 7 i 24, a dwa pozostałe boki mają długości 15 i 20 ma prostopadłe przekątne.	**P**	**F**
Czworokąt, w którym długości kolejnych boków są równe: $\sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{3}$ ma prostopadłe przekątne.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy czworokąt, żeby nie pogubić się w oznaczeniach jego boków.



Sprawdzamy najpierw czworokąt, w którym $a = 7, c = 24, b = 15$ i $d = 20$.

$$a^2 + c^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$
$$b^2 + d^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625.$$

To oznacza, że przekątne tego czworokąta rzeczywiście są prostopadłe.

Teraz sprawdzamy czworokąt, w którym $a = \sqrt{2}, b = 2, c = \sqrt{5}$ i $d = \sqrt{3}$.

$$a^2 + c^2 = 2 + 5 = 7$$
$$b^2 + d^2 = 4 + 3 = 7.$$

To oznacza, że przekątne tego czworokąta też są prostopadłe.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 15 (1 PKT)

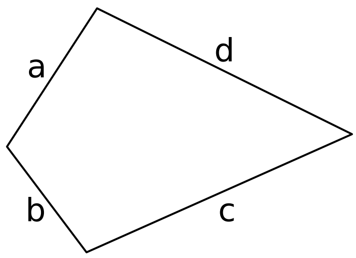
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli trzy kolejne boki czworokąta mają długości: 5, 6, 7 oraz przekątne tego czworokąta są prostopadłe, to czwarty bok tego czworokąta ma długość

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{110}$ C) $\sqrt{38}$ D) $2\sqrt{15}$

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy czworokąt, żeby nie pogubić się w oznaczeniach jego boków.



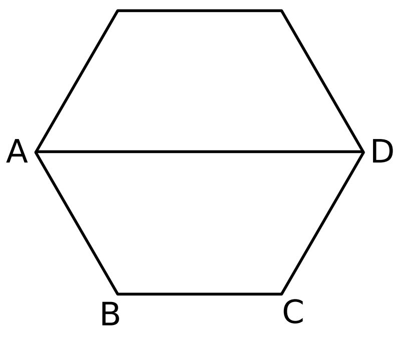
Jeżeli oznaczymy $a = 5, b = 6$ i $c = 7$, to czwarty bok d czworokąta musi spełniać warunek

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$
$$25 + 49 = 36 + d^2$$
$$38 = d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{38}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny o boku równym 4 cm. Przekątna AD dzieli go na dwa przystające trapezy równoramienne.

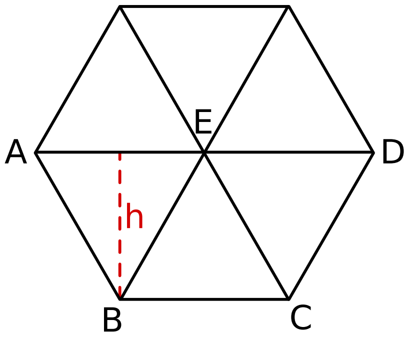


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Pole trapezu $ABCD$ jest równe

A) $6\sqrt{3}$ cm B) $2\sqrt{3}$ cm C) $16\sqrt{3}$ cm D) $12\sqrt{3}$ cm

ROZWIĄZANIE

Sześciokąt foremny składa się z 6 przystających trójkątów równobocznych.



Zatem ze wzoru na pole trójkąta równobocznego mamy

$$P_{ABCD} = 3 \cdot P_{ABE} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Jeżeli odcinek AB przecina oś Oy układu współrzędnych, to końce tego odcinka mogą mieć współrzędne

Wybierz odpowiedź spośród podanych

A) $A = (36, -43)$, $B = (43, 36)$
B) $A = (-36, -43)$, $B = (-43, 36)$
C) $A = (36, 43)$, $B = (43, -36)$
D) $A = (36, -43)$, $B = (-43, 36)$

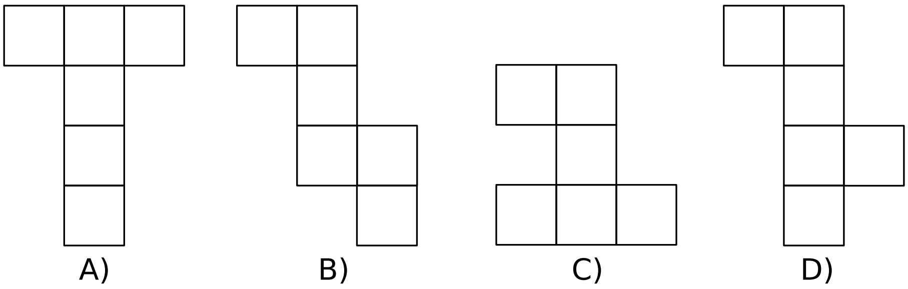
ROZWIĄZANIE

Jeżeli odcinek AB przecina oś Oy układu współrzędnych, to pierwsze współrzędne punktów A i B muszą mieć różne znaki. Tak jest tylko w przypadku punktów: $A = (36, -43)$, $B = (-43, 36)$.

Odpowiedź: **D**

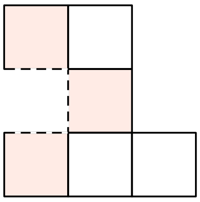
ZADANIE 18 (1 PKT)

Który z poniższych rysunków nie może być siatką sześcianu? Wybierz odpowiedź spośród podanych.



ROZWIĄZANIE

Rysunek C) nie przedstawia prawidłowej siatki sześcianu, bo zaznaczone na czerwono trzy kwadraty powinny być przyklejone do jednej krawędzi (przerywana linia), a to oczywiście jest niemożliwe.



Odpowiedź: **C**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Mediana zestawu liczb $14, 7, 10, x, 11, 7$ jest 9.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Liczba x jest równa

A) 2 B) 9 C) 8 D) 10

ROZWIĄZANIE

Wypiszmy dane liczby (bez x-a) w kolejności rosnącej.

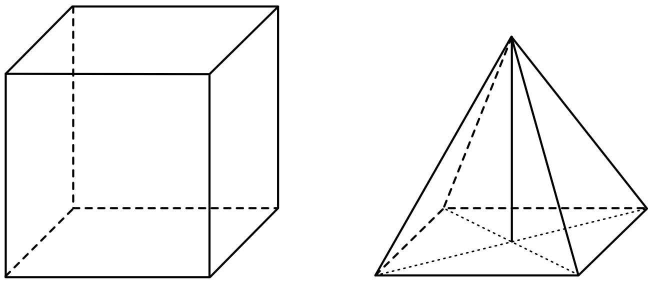
$$7, 7, 10, 11, 14.$$

Zauważmy, że po dodaniu x medianę będziemy liczyć ze zbioru składającego się z 6 liczb. Mediana będzie więc średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb. Jedną z tych liczb będzie 10, więc druga musi być równa 8 (żeby średnia wyszła 9).

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono sześcian i ostrosłup prawidłowy czworokątny. Bryły mają jednakowe podstawy i równe wysokości, a różnica objętości tych brył jest równa 18 cm^3.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Objętość ostrosłupa jest sześć razy mniejsza od objętości sześcianu.	**P**	**F**
Wysokość ostrosłupa ma długość 6 cm.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez a długość krawędzi sześcianu. Objętości sześcianu i ostrosłupa są odpowiednio równe

$$V_s = a^3$$
$$V_o = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}V_s.$$

Za podanej różnicy objętości mamy ponadto

$$18 = V_s - V_o = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3 \quad / \cdot \frac{3}{2}$$
$$27 = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Wysokość ostrosłupa jest równa wysokości sześcianu, więc ma długość 3.

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 21 (3 PKT)

Znajdź liczbę dwucyfrową wiedząc, że różnica między cyfrą dziesiątek, a cyfrą jedności tej liczby jest równa 3, oraz suma tej liczby i liczby powstałej przez zamianę miejscami jej cyfr jest równa 77.

ROZWIĄZANIE

Powiedzmy, że szukana liczba to $10a + b$ (a – cyfra dziesiątek, b – cyfra jedności). Mamy zatem układ równań.

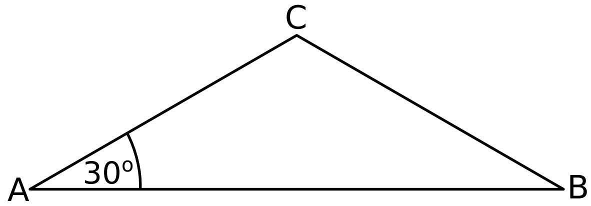
$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 10a + b + (10b + a) = 77 \quad \Rightarrow \quad 11a + 11b = 77 \quad \Rightarrow \quad a + b = 7 \end{cases}$$

Dodając równania stronami mamy $a = 5$, stąd $b = 7 - a = 2$.

Odpowiedź: **52**

ZADANIE 22 (3 PKT)

Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ABC ma miarę 30°. Uzasadnij, że pole trójkąta jest trzy razy mniejsze od pola trójkąta równobocznego o boku równym podstawie trójkąta ABC.

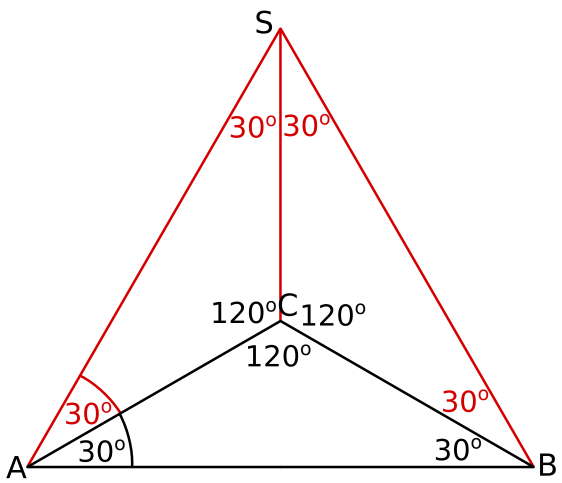


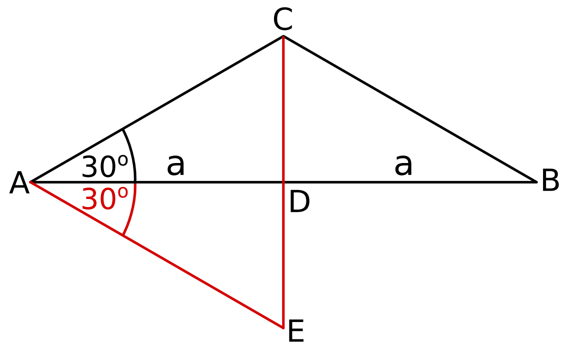
ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zauważmy, że jeżeli zbudujemy (narysujemy) trójkąt równoboczny ABS o boku równym podstawie danego trójkąta równoramiennego, to można go podzielić na 3 trójkąty przystające do trójkąta ABC. W takim razie rzeczywiście

$$P_{ABC} = \frac{1}{3}P_{ABS}.$$





Sposób II

Oznaczmy długość podstawy trójkąta ABC przez $2a$ i niech D będzie środkiem podstawy AB. Przy tych oznaczeniach pole trójkąta równobocznego o podstawie AB jest równe

$$P = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

Zauważmy, że z trójkątów ADC i BDC można zbudować trójkąt równoboczny AEC o wysokości AD (prawy rysunek). Jeżeli przez x oznaczymy długość boku trójkąta AEC, to ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego mamy

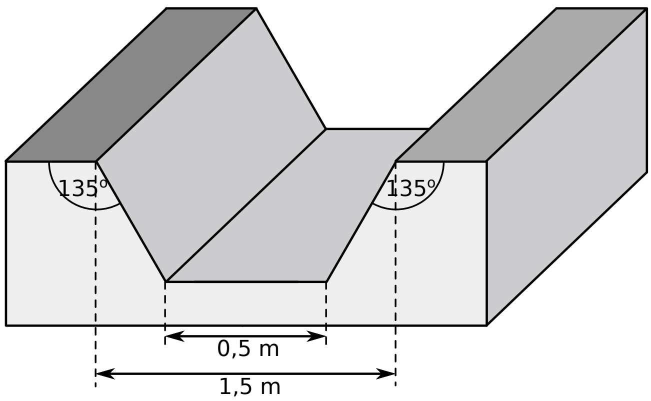
$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = a \quad / \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Korzystamy teraz ponownie ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.

$$P_{ABC} = P_{AEC} = \frac{\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{3}P.$$

ZADANIE 23 (4 PKT)

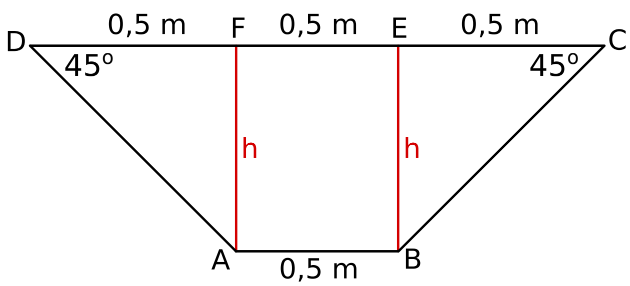
Przekrój betonowego kanału melioracyjnego ma kształt trapezu o podstawach 0,5 m i 1,5 m.



Oblicz ile wody zmieści się w takim kanale, jeżeli jego długość jest równa 50 m.

ROZWIĄZANIE

Z podanych informacji wynika, że musimy obliczyć objętość graniastosłupa prostego, którego podstawa jest opisanym trapezem, a wysokość jest równa $H = 50$. Szkicujemy interesujący nas trapez



Zauważmy najpierw, że

$$DF = EC = \frac{DC - AB}{2} = 0,5.$$

Trójkąty AFD i BEC są połówkami kwadratu (bo są prostokątne i mają kąty ostre równe 45°). To pozwala obliczyć wysokość trapezu

$$h = DF = 0,5.$$

Pole tego trapezu jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot h = \frac{0,5 + 1,5}{2} \cdot 0,5 = 0,5.$$

Pozostało obliczyć objętość graniastosłupa.

$$V = P_{ABCD} \cdot H = 0,5 \cdot 50 = 25.$$

Odpowiedź: 25 $\mathbf{m}^3$