PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

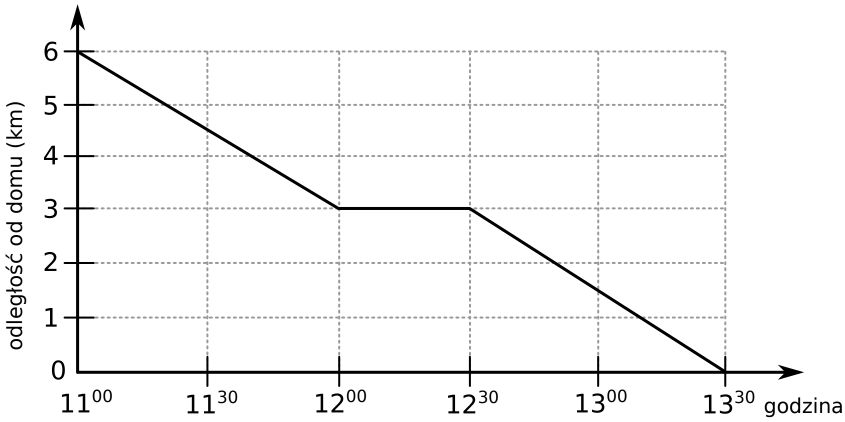
WWW.ZADANIA.INFO

8 KWIETNIA 2017

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

Ola odwiedziła koleżankę, a następnie wracała pieszo do domu. Na wykresie przedstawiono zależność między odległością Oli od domu a upływającym czasem.



ZADANIE 1 (1 PKT)

Które z poniższych zdań jest fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A) Ola dotarła do domu po 2,5 godziny.
B) Podczas powrotu do domu Ola zatrzymała się na półgodzinny postój.
C) W ciągu pierwszych dwóch godzin drogi powrotnej Ola przeszła 3 km.
D) O godzinie 12:15 Ola była w odległości 3 km od domu.

ROZWIĄZANIE

Z wykresu odczytujemy, że
Ola całą trasę przebyła w ciągu 2,5 godziny (wyruszyła o 11:00, a do domu wróciła o 13:30).
Pomiędzy godziną 12:00, a 12:30 Ola miała postój.
Do godziny 13:00 Ola przeszła $6 - 1,5 = 4,5$ kilometra.
W trakcie postoju, a więc pomiędzy 12:00, a 12:30 Ola była w odległości 3 km od domu.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Średnia prędkość z jaką Ola wracała do domu wynosi 2,4 km/h	**P**	**F**
Średnia prędkość Oli w ciągu pierwszych 30 minut była mniejsza niż średnia prędkość w ciągu ostatnich 30 minut powrotu Oli do domu.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Z wykresu odczytujemy, że całą trasę długości 6 km Ola przebyła w ciągu 2,5 godziny, więc jej średnia prędkość była równa

$$\frac{6}{2,5} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4 \text{ km/h}.$$

Ola zarówno w ciągu pierwszych 30 minut jak i w ciągu ostatnich 30 minut powrotu do domu przeszła 1,5 km, więc prędkości średnie w obu przypadkach są takie same.

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Z cyfr 2, 1, 5 i 7 Przemek utworzył wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A) Wszystkie liczby utworzone przez Przemka są mniejsze od 7519.
B) Wszystkie liczby utworzone przez Przemka są nieparzyste.
C) Dwie liczby utworzone przez Przemka są podzielne przez 18.
D) Wśród liczb utworzonych przez Przemka są liczby podzielne przez 4.

ROZWIĄZANIE

Z podanych cyfr można utworzyć 7521, a więc liczbę większą od 7519.
Jedną z utworzonych liczb jest np. 7512, więc są wśród tych liczb liczby parzyste.
Jeżeli utworzona liczba ma dzielić się przez 18, to musi się dzielić przez 9, a suma cyfr każdej z utworzonych liczb jest równa 15, więc nie ma takich liczb.
Wśród utworzonych liczb jest 5712, która jest podzielna przez 4 (bo 12 dzieli się przez 4).

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Wybierz odpowiedź spośród podanych.
Które z dwóch podanych liczb mają tę własność, że ich suma jest równa ich iloczynowi?
A) $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ i 1. C) -2 i -2 D) $\frac{1}{2}$ i -1

ROZWIĄZANIE

Wśród podanych par tylko $a = \frac{1}{2}$ i $b = -1$ mają tę własność

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ ab &= \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\sqrt[3]{108 \cdot 16}$ jest równa

A) 12 B) 48 C) $27\sqrt[3]{4}$ D) $4\sqrt[3]{54}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt[3]{108 \cdot 16} = \sqrt[3]{27 \cdot 4 \cdot 4^2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{4^3} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 6 (1 PKT)

Jeśli $45\,300\,000 : 10^n = 0,00453$, to n jest równe

A) 9 B) -10 C) 10 D) -11

ROZWIĄZANIE

Liczba 45 300 000 kończy się 5 zerami, więc

$$45\,300\,000 : 10^5 = 453.$$

Dalsze dzielenie przez 10 powoduje przesunięcie przecinka o jedną pozycję w lewo, więc

$$453 : 10^5 = 0,00453.$$

Zatem

$$45\,300\,000 : 10^{10} = 0,00453.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 7 (1 PKT)

Dane są liczby a i b takie, że $-\frac{5}{3} < a < -\frac{4}{3}$ oraz $-\frac{7}{4} < b < -\frac{5}{4}$.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Iloraz $\frac{b}{a}$ jest zawsze dodatni.	**P**	**F**
Różnica $3a - 4b$ jest zawsze dodatnia.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Obie liczby są ujemne, więc ich iloraz jest dodatni. Ponadto, jeżeli $-\frac{5}{3} < a < -\frac{4}{3}$, to $-5 < 3a < -4$. Podobnie, jeżeli $-\frac{7}{4} < b < -\frac{5}{4}$, to $-7 < 4b < -5$. W takim razie

$$3a > -5 > 4b$$

i stąd $3a - 4b > 0$.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Pięć osób ze sprawdzianu otrzymało ocenę dopuszczającą, cztery dostateczną, trzy osoby ocenę bardzo dobrą, dwie celującą jedna niedostateczną i pięć osób ocenę dobrą.
Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.
Mediana ocen z tego sprawdzianu jest równa
A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5

ROZWIĄZANIE

Wypiszmy oceny ze sprawdzianu od najmniejszej do największej.

$$1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,6,6.$$

Ocen jest 20, więc mediana to średnia arytmetyczna dwóch środkowych liczb.

$$m = \frac{3+4}{2} = 3,5.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Cenę nart obniżono o 8%. Klient kupił narty po obniżonej cenie i dzięki temu zapłacił o 160 zł mniej, niż zapłaciłby przed obniżką.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Przed obniżką narty kosztowały
A) 2000 zł B) 1500 zł C) 1380 zł D) 960 zł

ROZWIĄZANIE

Niech x oznacza cenę nart przed obniżką. Mamy zatem

$$160 = 8\%x = \frac{8}{100}x = \frac{2}{25}x \quad / \cdot \frac{25}{2}$$
$$x = 160 \cdot \frac{25}{2} = 80 \cdot 25 = 2000 \text{ zł.}$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 10 (1 PKT)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

15 minut to $\frac{1}{336}$ tygodnia.	**P**	**F**
12 sekund to $\frac{1}{7200}$ doby.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

15 minut to $\frac{1}{4}$ godziny, czyli

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{96}$$

doby. A doba to $\frac{1}{7}$ tygodnia, więc 15 minut to

$$\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{672}$$

tygodnia.

12 sekund to $\frac{1}{5}$ minuty, czyli

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{300}$$

godziny. Jest to więc

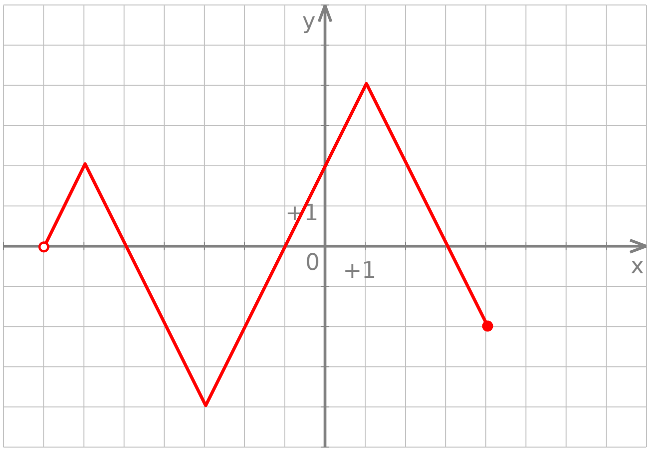
$$\frac{1}{300} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{7200}$$

część doby.

Odpowiedź: F, P

ZADANIE 11 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Różnica między największą i najmniejszą wartością funkcji jest równa 8.	**P**	**F**
Do wykresu funkcji należy punkt $(0,2)$.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Największa wartość funkcji to $f(1) = 4$, a najmniejsza to $f(-3) = -4$. Różnica tych dwóch liczb to

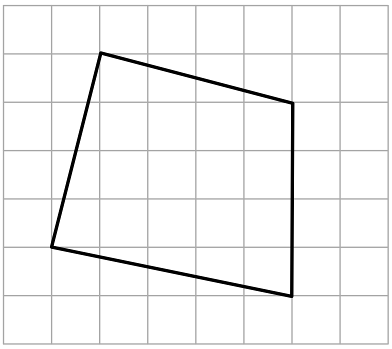
$$4 - (-4) = 8.$$

Ponadto, $f(0) = 2$, więc do wykresu należy punkt $(0, f(0)) = (0,2)$.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Na siatce kwadratowej narysowano czworokąt. Bok kwadratu siatki jest równy 1.



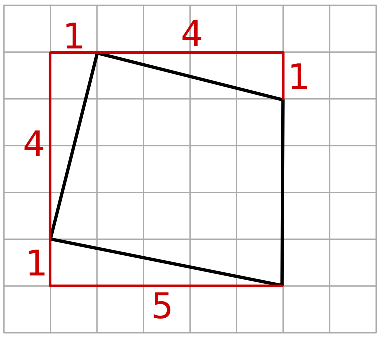
Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.
Pole narysowanego czworokąta jest równe

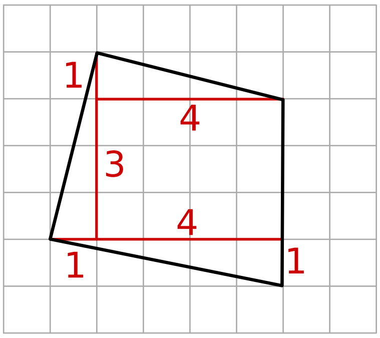
A) 18,5 B) 20 C) 21 D) 22

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Pole narysowanego czworokąta możemy obliczyć odejmując od pola kwadratu o boku 5 pola trzech trójkątów prostokątnych.





Jest więc ono równe

$$5^2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5 = 25 - 2 - 2 - 2,5 = 18,5.$$

Sposób II

Pole czworokąta możemy też obliczyć jako sumę pola prostokąta o bokach długości 3 i 4 oraz trzech pól trójkątów prostokątnych. Pole jest więc równe

$$3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5 = 12 + 2 + 2 + 2,5 = 18,5.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Ola ma 7 lat. Średnia arytmetyczna wieku Ewy i Karola jest równa 10 lat.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Średnia arytmetyczna wieku Oli, Ewy i Karola jest równa

A) 6 lat B) 9 lat C) 10 lat D) 15 lat

ROZWIĄZANIE

Skoro średnia arytmetyczna wieku Ewy i Karola jest równa 10 lat, to w sumie mają 20 lat. To oznacza, że średnia wieku Oli, Ewy i Karola jest równa

$$\frac{20+7}{3} = 9 \text{ lat.}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Tomek otrzymał torebkę, w której było n cukierków. Sam zjadł z tej torebki 8 cukierków, a pozostałe cukierki rozdzielił pomiędzy swoich 5 kolegów. Czworo z tych chłopców otrzymało tyle samo cukierków, a piąty z nich, Szymon, otrzymał o jeden cukierek więcej od pozostałych. **Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Liczba cukierków, które otrzymał Szymon jest równa**

A) $\frac{n-2}{5}$ B) $\frac{n-4}{5}$ C) $\frac{n}{5}-9$ D) $\frac{n-8}{5}+1$

ROZWIĄZANIE

Tomek rozdzielił pomiędzy swoich kolegów $n-8$ cukierków. Jeżeli ponadto odejmiemy jeden dodatkowy cukierek, który otrzymał Szymon, to każdy z czterech kolegów Tomka otrzymał $\frac{n-9}{5}$ cukierków, a Szymon otrzymał

$$\frac{n-9}{5}+1=\frac{n-4}{5}$$

cukierki.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną monetą.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeśli w pierwszych trzech rzutach wypadnie orzeł, to w czwartym rzucie
A) jest bardziej prawdopodobne, że wypadnie reszka.
B) na pewno wypadnie reszka.
C) jest tak samo prawdopodobne, że wypadnie orzeł lub reszka.
D) jest bardziej prawdopodobne, że wypadnie orzeł.

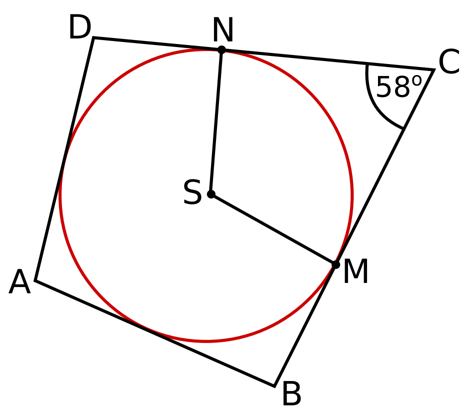
ROZWIĄZANIE

Wyniki pierwszych trzech rzutów nie mają wpływu na wynik w czwartym rzucie, więc otrzymanie reszki i orła są tak samo prawdopodobne.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ ma środek S i jest styczny do boków BC i CD odpowiednio w punktach M i N. Kąt BCD ma miarę 58° (rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kąt MSN ma miarę
A) 122° B) 32° C) 212° D) 116°

ROZWIĄZANIE

Ponieważ promienie SM i SN są prostopadłe do stycznych BC i CD, dwa kąty czworokąta $SMCN$ są proste. W takim razie

$$\measuredangle MSN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 122^\circ.$$

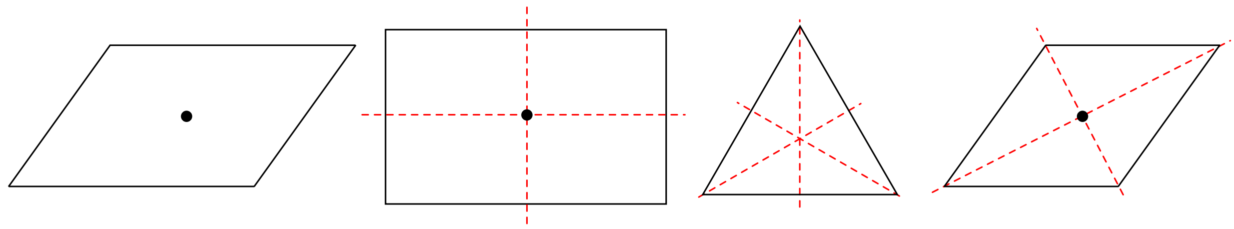
Odpowiedź: **A**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.
Figurą, która ma oś symetrii, ale nie ma środka symetrii jest
A) równoległobok B) prostokąt C) trójkąt równoboczny D) romb

ROZWIĄZANIE

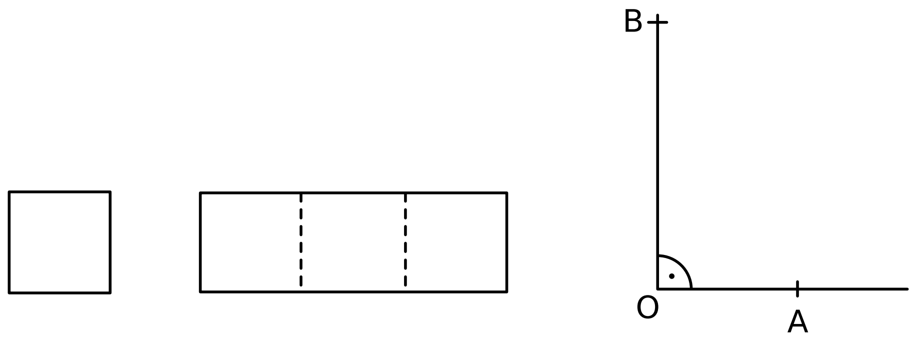
Wśród wymienionych figur tylko trójkąt równoboczny nie posiada środka symetrii.



Odpowiedź: **C**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Ewa narysowała kwadrat o boku 1, prostokąt o bokach 3 i 1 oraz kąt prosty o wierzchołku O.



Następnie od wierzchołka O kąta prostego odmierzyła na jednym ramieniu kąta odcinek OA o długości równej przekątnej kwadratu, a na drugim ramieniu – odcinek OB o długości równej przekątnej prostokąta.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka AB jest równa

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ C) $\sqrt{12}$ D) $\sqrt{2}+2$

ROZWIĄZANIE

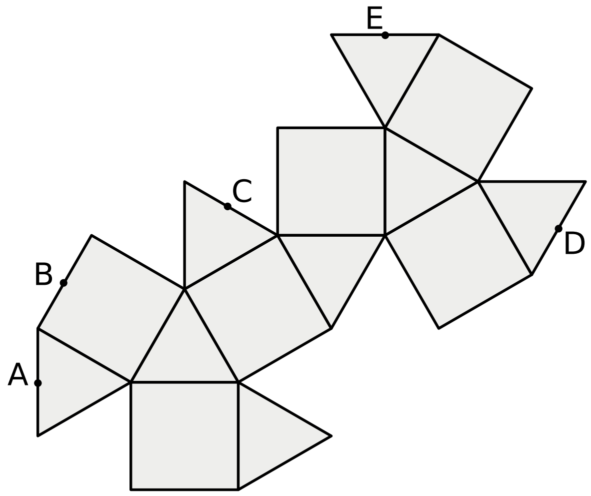
Przekątna kwadratu o boku długości 1 ma długość $\sqrt{2}$, a przekątna narysowanego prostokąta ma długość $\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$. Zatem $OA=\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{10}$ i

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2+10}=\sqrt{12}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Na rysunku poniżej przedstawiono siatkę pewnej bryły. Punkty: A, B, C, D, E są środkami jej krawędzi.



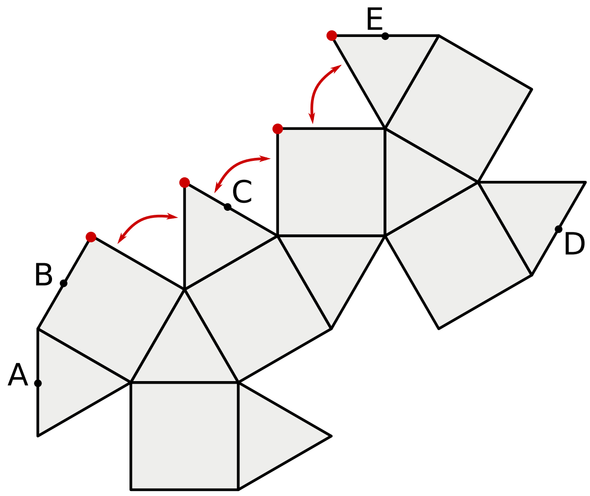
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po złożeniu bryły z tej siatki punkt E pokryje się z punktem

A) A B) B C) C D) D

ROZWIĄZANIE

Zaznaczmy na siatce pary krawędzi, które po sklejeniu zostaną utożsamione.



Powinno być teraz jasne, że punkt E pokryje się z punktem B.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Objętość metalowej kuli jest równa $R = 36\pi$ cm^3. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Objętość tej kuli jest większa niż 110 cm^3.	**P**	**F**
Pole powierzchni tej kuli jest równe 36π cm^2.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Ponieważ $\pi \approx 3,1415 > 3,1$ mamy

$$V = 36\pi > 36 \cdot 3,1 = 108 + 3,6 = 111,6 > 110.$$

Oznaczmy przez r promień kuli. Z podanej objętości mamy więc

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \quad / \cdot \frac{3}{4\pi} \\ &r^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad r = 3. \end{aligned}$$

Pole powierzchni kuli jest więc równe

$$4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9 = 36\pi \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 21 (4 PKT)

Janek i Ludwik mają razem 54 lata. Trzynaście lat temu Ludwik był 3 razy starszy od Janka. Ile lat temu Ludwik był dwa razy starszy od Janka?

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez x i y wiek odpowiednio Janka i Ludwika, to mamy układ równań

$$\begin{cases} x+y=54 \\ y-13=3(x-13) \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie (żeby skrócić y).

$$x+13=54-3x+39$$
$$4x=80 \quad \Rightarrow \quad x=20.$$

Zatem $y=54-x=34$.

Różnica wieku między Ludwikiem i Jankiem jest równa $34-20=14$, więc Ludwik był dwa razy starszy od Janka, gdy Janek miał 14 lat, czyli 6 lat temu.

Sposób II

Skoro teraz mają łącznie 54 lata, to 13 lat temu mieli łącznie 28 lat. W dodatku Ludwik był 3 razy starszy od Janka, czyli

$$x+3x=28 \quad \Rightarrow \quad x=7,$$

gdzie przez x oznaczyliśmy wiek Janka 13 lat temu. Zatem teraz Janek ma 20 lat, a Ludwik 34.

Różnica wieku między Ludwikiem i Jankiem jest równa $34-20=14$, więc Ludwik był dwa razy starszy od Janka, gdy Janek miał 14 lat, czyli 6 lat temu.

Odpowiedź: **6 lat temu.**

ZADANIE 22 (3 PKT)

Uczniowie klas pierwszych pewnego gimnazjum pojechali na wycieczkę pociągiem. W każdym zajętym przez nich przedziale było sześcioro uczniów. Jeśli w każdym przedziale byłoby ośmioro uczniów, to zajęliby oni o 2 przedziały mniej. Ilu uczniów pojechało na tę wycieczkę? Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez n liczbę uczniów, którzy pojechali na wycieczkę, to wiemy, że zmieścili się oni w $\frac{n}{6}$ przedziałach. Wiemy ponadto, że gdyby zmniejszyć liczbę przedziałów o 2, to w każdym przedziale musielibyśmy umieścić 8 uczniów. Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{n}{6}-2=\frac{n}{8} \quad / \cdot 24$$
$$4n-48=3n \quad \Rightarrow \quad n=48.$$

Sposób II

Jeżeli oznaczymy przez n liczbę uczniów, a przez p liczbę zajętych przez nich przedziałów, to wiemy, że

$$\begin{cases} n = 6p \\ n = 8(p-2). \end{cases}$$

Mamy stąd

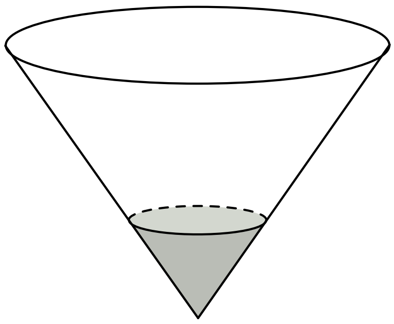
$$6p = 8p - 16 \quad \Rightarrow \quad 2p = 16 \quad \Rightarrow \quad p = 8.$$

Zatem $n = 6p = 48$.

Odpowiedź: **48**

ZADANIE 23 (3 PKT)

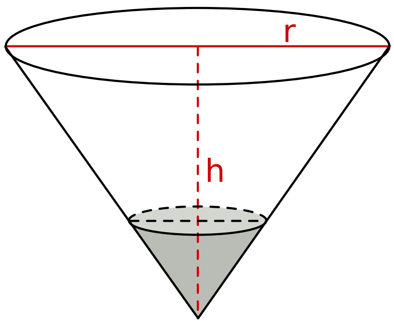
Do pojemnika w kształcie stożka wlano 1 litr wody, która wypełniła to naczynie do $\frac{1}{3}$ wysokości. Jaka jest całkowita pojemność tego naczynia?



ROZWIĄZANIE

Sposób I

Oznaczmy przez r promień podstawy stożka, a przez h jego wysokość.



Stożek utworzony przez wlaną wodę ma wysokość $\frac{h}{3}$ i promień podstawy $\frac{r}{3}$. Z podanej objętości mamy więc

$$1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h.$$

To oznacza, że objętość naczynia jest równa

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 27 \text{ litrów.}$$

Sposób II

Stożek utworzony przez wlaną wodę jest 3 razy mniejszy od całego naczynia, więc jego objętość jest $3^3 = 27$ razy mniejsza od objętości naczynia. W takim razie naczynie ma objętość 27 litrów.

Odpowiedź: **27 litrów**