EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

24 KWIETNIA 2013

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

W tabeli przedstawiono informacje dotyczące wieku wszystkich uczestników obozu narciarskiego.

Wiek uczestnika	Liczba uczestników
10 lat	5
14 lat	3
15 lat	4
16 lat	8

ZADANIE 1 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Mediana wieku uczestników obozu jest równa
A) 14 lat B) 14,5 roku C) 15 lat D) 15,5 roku

ROZWIĄZANIE

W sumie w obozie uczestniczyło

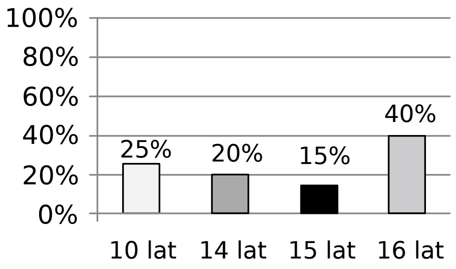
$$5 + 3 + 4 + 8 = 20$$

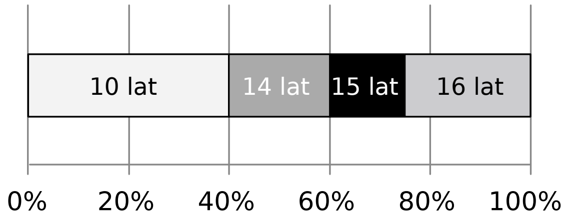
osób, więc mediana to średnia arytmetyczna 10 i 11 danej. Dziesięć i czternaście lat ma 8 uczestników obozu, więc 10 i 11 dana to 15 lat. Tyle też jest równa mediana.

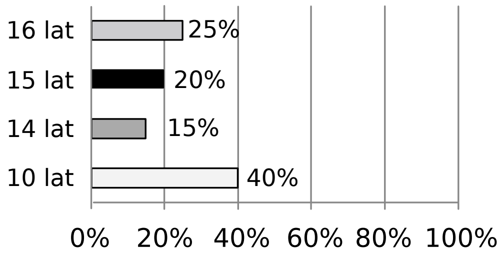
Odpowiedź: **C**

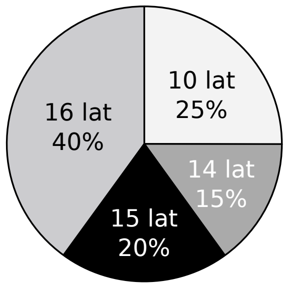
ZADANIE 2 (1 PKT)

Na którym diagramie poprawnie przedstawiono procentowy podział uczestników obozu ze względu na wiek? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A)


B)


C)


D)


ROZWIĄZANIE

Liczymy procentowy udział poszczególnych grup wiekowych.

$$\begin{aligned}
&10\text{ lat:} && \frac{5}{5+3+4+8} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\%\\
&14\text{ lat:} && \frac{3}{20} = \frac{3}{20} \cdot 100\% = 15\%\\
&15\text{ lat:} && \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%\\
&16\text{ lat:} && \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%.
\end{aligned}$$

Taki podział procentowy jest przedstawiony tylko na diagramie D.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 3 (1 PKT)

W pewnej hurtowni za 120 jednakowych paczek herbaty trzeba zapłacić 1500 zł.
Ile takich paczek herbaty można kupić w tej hurtowni za 600 zł, przy tej samej cenie za jedną paczkę? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 48 B) 50 C) 52 D) 56

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Z podanych informacji wiemy, że za 100 zł można kupić

$$\frac{120}{15} = \frac{40}{5} = 8$$

paczek herbaty. Zatem za 600 zł można kupić

$$6 \cdot 8 = 48$$

paczek herbaty.

Sposób II

Z podanych informacji wiemy, że 1 paczka herbaty kosztuje

$$\frac{1500}{120} = \frac{150}{12} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} \text{ zł.}$$

W takim razie za 600 zł możemy kupić

$$\frac{600}{\frac{25}{2}} = 600 \cdot \frac{2}{25} = 6 \cdot 100 \cdot \frac{2}{25} = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Cena brutto = cena netto + podatek VAT

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli cena netto 1 kg jabłek jest równa 2,50 zł, a cena brutto jest równa 2,70 zł, to podatek VAT wynosi 8% ceny netto.	**P**	**F**
Jeżeli cena netto podręcznika do matematyki jest równa 22 zł, to cena tej książki z 5% podatkiem VAT wynosi 24,10 zł.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Jeżeli podatek VAT jest równy 8% to cena brutto 1 kg jabłek jest równa

$$2,50 + 8\% \cdot 2,50 = 2,50 + \frac{8}{100} \cdot 2,50 = 2,50 + \frac{2}{25} \cdot 2,50 = \\ = 2,50 + 0,20 = 2,70 \text{ zł.}$$

Jeżeli podatek VAT jest równy 5% to cena podręcznika jest równa

$$22 + 5\% \cdot 22 = 22 + \frac{5}{100} \cdot 22 = 22 + \frac{1}{20} \cdot 22 = 22 + \frac{11}{10} \\ = 22 + 1,10 = 23,10 \text{ zł.}$$

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Ile spośród liczb: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{10}{25}, \frac{1}{4}$ spełnia warunek $\frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}$?
Wybierz odpowiedź spośród podanych.
A) Jedna liczba. B) Dwie liczby. C) Trzy liczby. D) Cztery liczby.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zamienimy wszystkie ułamki na ułamki dziesiętne. Dana nierówność ma więc postać

$$\frac{4}{10} < x < \frac{6}{10}$$
$$0,4 < x < 0,6.$$

Zauważmy teraz, że

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,6666\ldots$$
$$\frac{1}{2} = 0,5$$
$$\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 0,4$$
$$\frac{1}{4} = 0,25.$$

W takim razie tylko $\frac{1}{2}$ spełnia daną nierówność.

Sposób II

Szacujemy

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \quad \text{i} \quad \frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10}$$
$$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20} < \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

W takim razie tylko $\frac{1}{2}$ spełnia daną nierówność.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Dane są liczby $a = (-2)^{12}$, $b = (-2)^{11}$, $c = 2^{10}$.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Liczby te uporządkowane od najmniejszej do największej to:
A) c, b, a B) a, b, c C) c, a, b D) b, c, a

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$a = (-2)^{12} = (-1)^{12} \cdot 2^{12} = 2^{12}$$
$$b = (-2)^{11} = (-1)^{11} \cdot 2^{11} = -2^{11}$$
$$c = 2^{10}.$$

W takim razie $b < c < a$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 7 (1 PKT)

Dane są liczby x i y spełniające warunki: $x < 0$ i $y < x$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba y jest ujemna.	**P**	**F**
Liczba x jest większa od liczby y.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

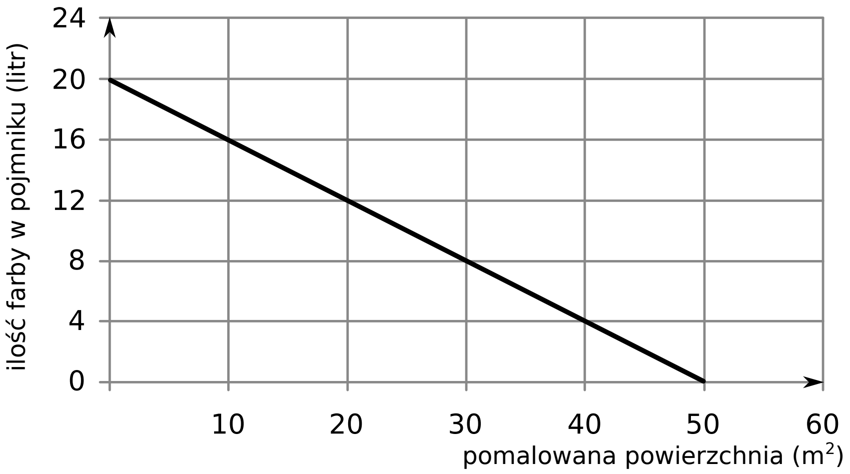
Z podanych informacji mamy

$$y < x < 0.$$

Odpowiedź: P, P

Informacja do zadań 8 i 9

Wykres przedstawia zależność ilości farby pozostałej w pojemniku (w litrach) od powierzchni ściany (w m^2) pomalowanej farbą z tego pojemnika.



ZADANIE 8 (1 PKT)

Ile farby pozostało w pojemniku po pomalowaniu $30\ \mathrm{m}^2$ ściany? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 8 litrów B) 12 litrów C) 16 litrów D) 20 litrów

ROZWIĄZANIE

Odczytujemy z wykresu, że po pomalowaniu $30\ \mathrm{m}^2$ ściany w pojemniku pozostało 8 litrów farby.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Ile farby zużyto na pomalowanie $10\ \mathrm{m}^2$ ściany? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 4 litry B) 8 litrów C) 10 litrów D) 16 litrów

ROZWIĄZANIE

Odczytujemy z wykresu, że po pomalowaniu $10\ \mathrm{m}^2$ ściany z pojemnika ubyły

$$20 - 16 = 4$$

litry farby.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 10 (1 PKT)

W pudełku było 20 kul białych i 10 czarnych. Dołożono jeszcze 10 kul białych i 15 czarnych. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Przed dołożeniem kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było trzy razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.	**P**	**F**
Po dołożeniu kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Przed dołożeniem kul, kul białych było dwa razy więcej niż kul czarnych, więc prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było dwa razy większe.

Po dołożeniu kul, w pudełku jest 30 kul białych i 25 kul czarnych, więc bardziej prawdopodobne jest wylosowanie kuli białej.

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Średnia prędkość samochodu na trasie przebytej w czasie 4 godzin wyniosła 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Aby czas przejazdu był o 1 godzinę krótszy, średnia prędkość samochodu na tej trasie musiałaby wynosić 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.	**P**	**F**
Gdyby średnia prędkość samochodu na tej trasie była równa 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, to czas przejazdu byłby równy 6 godzin.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Z podanych informacji wiemy, że długość przebytej trasy to

$$4 \cdot 60 = 240 \text{ km}.$$

Gdyby czas przejazdu był krótszy o 1 godzinę, to średnia prędkość byłaby równa

$$\frac{240}{3} = 80 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Jeżeli czas przejazdu byłby równy 6 godzin, to średnia prędkość byłaby równa

$$\frac{240}{6} = 40 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Ania ma w skarbonce 99 zł w monetach o nominałach 2 zł i 5 zł. Monet dwuzłotowych jest 2 razy więcej niż pięciozłotowych.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Jeżeli przez x oznaczymy liczbę monet pięciozłotowych, a przez y – liczbę monet dwuzłotowych, to podane zależności opisuje układ równań

A) $\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 5y = 99 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y = 2x \\ 5x + 2y = 99 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x = 2y \\ 5x + 2y = 99 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + 5y = 99 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

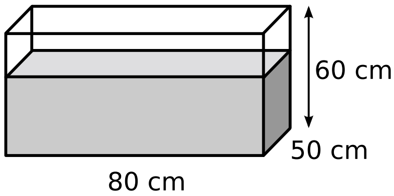
Monet dwuzłotowych (y) jest dwa razy więcej niż monet pięciozłotowych (x) więc $y = 2x$.
W sumie w skarbonce jest

$$2y + 5x = 99 \text{ złotych.}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 13 (1 PKT)

W prostopadłościennym akwarium, o wymiarach podanych na rysunku, woda sięga $\frac{2}{3}$ jego wysokości.



Ile litrów wody jest w akwarium?
Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 16000 litrów B) 1600 litrów C) 160 litrów D) 16 litrów

ROZWIĄZANIE

Objętość wody w akwarium to

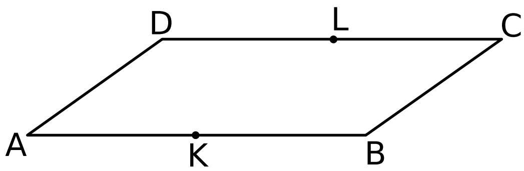
$$\frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 50 \cdot 60 = 80 \cdot 50 \cdot 40 = 4\,000 \cdot 40 = 160\,000 \text{ cm}^3.$$

Ponieważ 1 litr to $1\,000$ cm^3, jest to 160 litrów.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 14 (1 PKT)

W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AD. Punkt K jest środkiem boku AB, a punkt L jest środkiem boku CD.

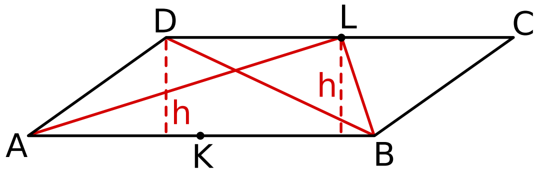


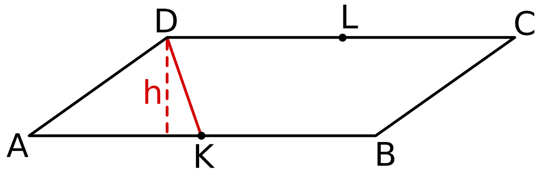
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABL ma takie samo pole, jak trójkąt ABD.	**P**	**F**
Pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta AKD.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąty ABL i ABD mają wspólną podstawę AB oraz równe wysokości opuszczone na tę podstawę.





To oznacza, że trójkąty te mają równe pola.
Pole trójkąta AKD jest równe

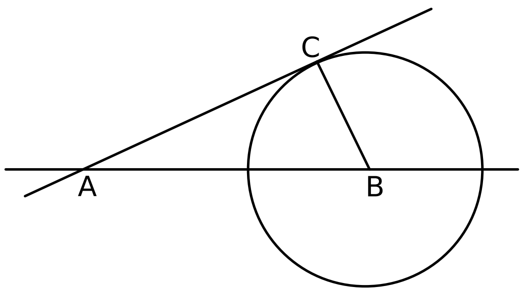
$$\frac{1}{2}AK \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{4}AB \cdot h.$$

Jest to więc $\frac{1}{4}$ pola równoległoboku.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Punkt B jest środkiem okręgu. Prosta AC jest styczna do okręgu w punkcie C, $|AB| = 20$ cm i $|AC| = 16$ cm.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Promień BC okręgu ma długość

A) 12 cm B) 10 cm C) 4 cm D) 2 cm

ROZWIĄZANIE

Ponieważ styczna AC jest prostopadła do promienia BC, więc trójkąt ABC jest prostokątny. Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę α, drugi ma miarę o 30° większą niż kąt α, a trzeci ma miarę trzy razy większą niż kąt α.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Trójkąt ten jest
A) równoboczny. B) równoramienny. C) rozwartokątny. D) prostokątny.

ROZWIĄZANIE

Ponieważ suma kątów w trójkącie jest równa 180°, mamy równanie

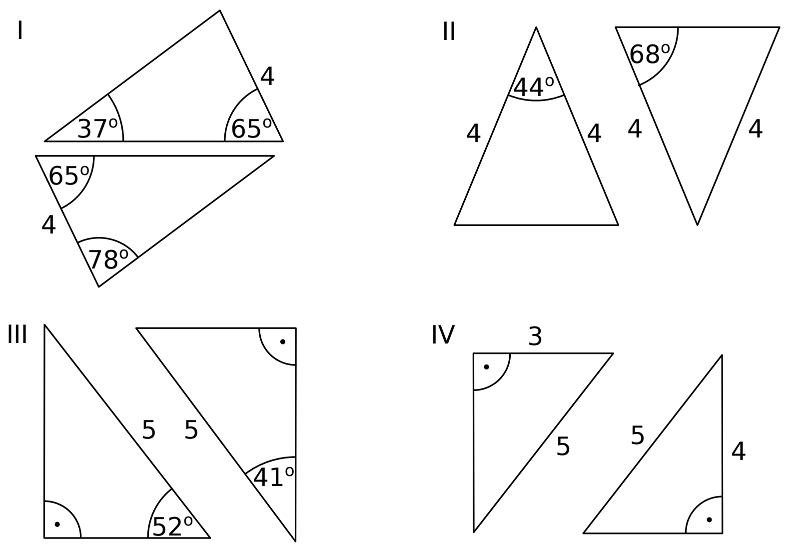
$$\begin{aligned}&\alpha + (\alpha + 30^\circ) + 3\alpha = 180^\circ\\&5\alpha = 150^\circ \quad / : 5\\&\alpha = 30^\circ.\end{aligned}$$

W takim razie pozostałe kąty trójkąta mają miary $\alpha + 30^\circ = 60^\circ$ i $3\alpha = 90^\circ$. Jest to więc trójkąt prostokątny.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 17 (1 PKT)

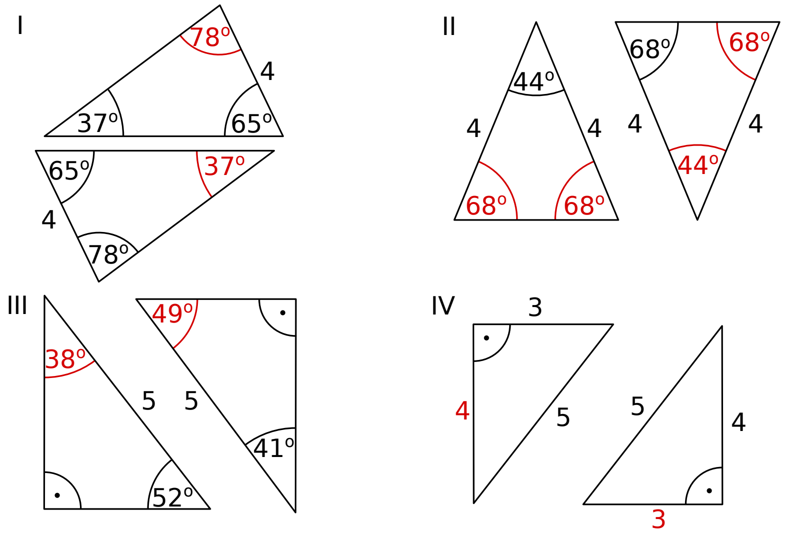
Na rysunkach I–IV przedstawiono cztery pary trójkątów.



Na którym rysunku trójkąty nie są przystające? Wybierz odpowiedź spośród podanych.
A) I B) II C) III D) IV

ROZWIĄZANIE

Dopiszmy brakujące miary kątów w narysowanych trójkątach.



Ponieważ

$$180^\circ - 37^\circ - 65^\circ = 78^\circ$$
$$180^\circ - 78^\circ - 65^\circ = 37^\circ,$$

to trójkąty z rysunku I mają równe kąty i bok tej samej długości pomiędzy odpowiadającymi kątami, więc są przystające.

Trójkąty na rysunku II są równoramienne oraz

$$\frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ,$$

więc mają równe kąty przy podstawie. Te trójkąty są więc przystające.

Trójkąty na rysunku III są prostokątne oraz

$$90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$$
$$90^\circ - 41^\circ = 49^\circ.$$

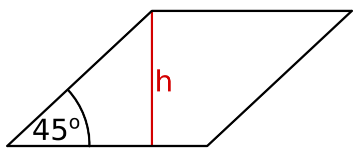
Kąty ostre są różne, więc trójkąty nie są przystające.

Trójkąty na rysunku IV to trójkąty prostokątne o bokach 3, 4, 5.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Kąt ostry rombu ma miarę 45°, a wysokość rombu jest równa h.

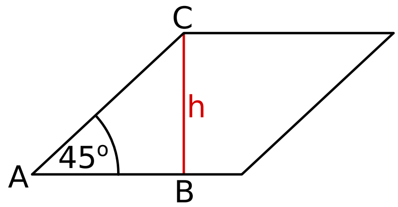


Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Pole tego rombu można wyrazić wzorem

A) $P = h^2$ B) $P = h^2\sqrt{2}$ C) $P = \frac{h^2\sqrt{2}}{2}$ D) $P = \frac{h^2\sqrt{3}}{4}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąt ABC jest połówką kwadratu.



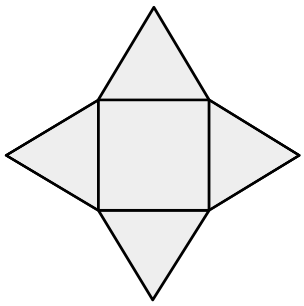
Zatem $AC = h\sqrt{2}$ i pole rombu jest równe

$$P = h\sqrt{2} \cdot h = h^2\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Siatka ostrosłupa składa się z kwadratu i trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach tego kwadratu.

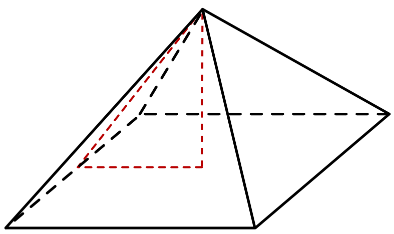


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają taką samą długość.	**P**	**F**
Wysokość tego ostrosłupa jest mniejsza niż wysokość jego ściany bocznej.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Zarówno cztery krawędzie podstawy, jak i cztery krawędzie boczne mają tę samą długość.



Jeżeli naszkicujemy ostrosłup prawidłowy czworokątny powstający po sklejeniu tej siatki to widać, że rzeczywiście wysokość ostrosłupa jest mniejsza od wysokości ściany bocznej.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Suma objętości 8 kul, z których każda ma promień 1, jest taka sama jak objętość jednej kuli o promieniu

A) $8\sqrt{3}$ B) 8 C) $2\sqrt{2}$ D) 2

ROZWIĄZANIE

Suma objętości 8 kul o promieniu $r = 1$ to

$$8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 8\pi = \frac{4}{3} \cdot 2^3\pi.$$

Jest to więc dokładnie objętość kuli o promieniu 2.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 21 (3 PKT)

W pewnej klasie liczba chłopców stanowi 80% liczby dziewcząt. Gdyby do tej klasy doszło jeszcze trzech chłopców, to liczba chłopców byłaby równa liczbie dziewcząt. Ile dziewcząt jest w tej klasie? Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczmy przez x i y odpowiednio liczbę chłopców i dziewcząt, to mamy układ równań

$$\begin{cases} x = 0,8y \\ x + 3 = y. \end{cases}$$

Podstawiamy $x = 0,8y$ z pierwszego równania do drugiego i mamy

$$\begin{aligned} &0,8y + 3 = y \\ &3 = 0,2y \quad / : 0,2 \\ &y = \frac{3}{0,2} = \frac{3}{\frac{2}{10}} = \frac{30}{2} = 15. \end{aligned}$$

Sposób II

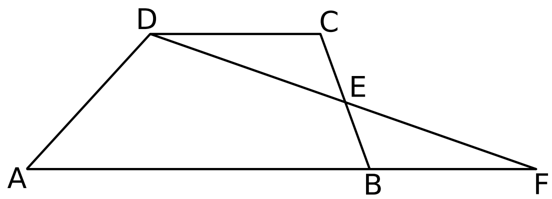
Jeżeli oznaczymy przez n liczbę dziewcząt w klasie, to z podanych informacji mamy równanie.

$$\begin{aligned}&80\%n+3=n\\&3=n-0,8n\\&3=0,2n \quad /\cdot 5\\&15=n.\end{aligned}$$

Odpowiedź: **15**

ZADANIE 22 (2 PKT)

Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$ i trójkąt AFD. Punkt E leży w połowie odcinka BC. Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ i pole trójkąta AFD są równe.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąty BFE i CDE mają równe kąty

$$\begin{aligned}&\measuredangle EFB=\measuredangle EDC\\&\measuredangle BEF=\measuredangle CED,\end{aligned}$$

więc są podobne. Ponadto z założenia $EB=EC$, więc trójkąty te są przystające. W takim razie

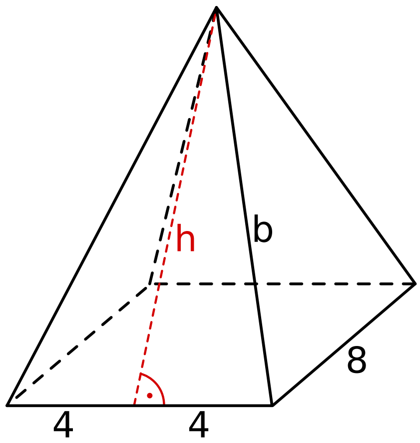
$$P_{ABCD}=P_{ABED}+P_{CDE}=P_{ABED}+P_{BFE}=P_{AFD}.$$

ZADANIE 23 (4 PKT)

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 80 cm^2, a pole jego powierzchni całkowitej wynosi 144 cm^2. Oblicz długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy ostrosłup.



Skoro znamy pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej, to możemy obliczyć pole podstawy.

$$P_p = P_c - P_b = 144 - 80 = 64 \text{ cm}^2.$$

To oznacza, że w podstawie ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 8 cm. Jeżeli oznaczmy teraz przez h długość wysokości ściany bocznej, to z podanego pola powierzchni bocznej mamy równanie

$$\begin{aligned} &80 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h \\ &80 = 16h \quad / : 16 \\ &h = 5. \end{aligned}$$

Pozostało obliczyć długość b krawędzi bocznej. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$b = \sqrt{h^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \text{ cm}.$$

Odpowiedź: **Krawędź podstawy: 8 cm, krawędź boczna: $\sqrt{41}$ cm.**