PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

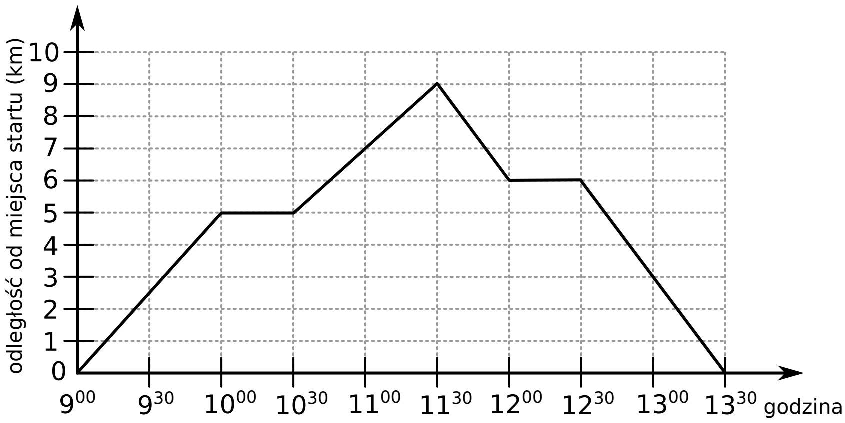
WWW.ZADANIA.INFO

25 MARCA 2017

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

Grupa młodzieży wybrała się na spacer po lesie. W trakcie wycieczki dwukrotnie zrobiono przerwę na odpoczynek. Wykres przedstawia zależność przebytej drogi od czasu trwania spaceru.



ZADANIE 1 (1 PKT)

Które z poniższych zdań jest fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) Czas poświęcony na przerwy stanowił ponad 20% czasu całej wycieczki.
B) W trakcie wycieczki młodzież pokonała dystans 9 kilometrów.
C) W ciągu ostatniej godziny młodzież pokonała $\frac{1}{3}$ całej trasy.
D) Pomiędzy przerwami młodzież pokonała dystans 7 kilometrów.

ROZWIĄZANIE

Z wykresu odczytujemy, że
Cała wycieczka trwała 4,5 godziny, więc czas spędzony na przerwach stanowił

$$\frac{1}{4,5} = \frac{2}{9} > \frac{2}{10} = 20\%.$$

czasu całej wycieczki.
W trakcie wycieczki młodzież pokonała dystans $9+9=18$ kilometrów.
W ciągu ostatniej godziny młodzież pokonała 6 km, czyli $\frac{1}{3}$ z 18 kilometrów.
Pomiędzy przerwami, czyli od godz. 10:30 do 12:00 młodzież przeszła $4+3=7$ kilometrów.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Bezpośrednio przed drugą przerwą prędkość poruszania się grupy była taka sama jak tuż przed zakończeniem wycieczki.	**P**	**F**
W czasie pomiędzy przerwami grupa poruszała się ze stałą prędkością.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Prędkość poruszania się przed drugą przerwą (w godz. 11:30 do 12:00) była równa

$$\frac{3}{0,5} = 6 \text{ km/h},$$

a w końcowym etapie spaceru (w godz. 12:30 do 13:30) grupa poruszała się z prędkością

$$\frac{6}{1} = 6 \text{ km/h}.$$

W godzinach 10:30 do 11:30 grupa poruszała się z prędkością

$$\frac{4}{1} = 4 \text{ km/h},$$

a w godzinach 11:30 do 12:00 prędkość była równa 6 km/h. Prędkość nie była więc stała.

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Z cyfr 3, 4 i 5 Kasia utworzyła wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A) Wszystkie liczby utworzone przez Kasię są nieparzyste.
B) Wszystkie liczby utworzone przez Kasię są podzielne przez 3.
C) Trzy liczby utworzone przez Kasię są podzielne przez 5.
D) Wśród liczb utworzonych przez Kasię są liczby podzielne przez 4.

ROZWIĄZANIE

Jedną z utworzonych liczb jest np. 354, więc są wśród tych liczb liczby parzyste.
Suma cyfr w każdej z utworzonych liczb jest równa $3+4+5=12$, więc każda z tych liczb dzieli się przez 3.
Jeżeli utworzona liczba dzieli się przez 5, to na końcu musi mieć 5-tkę, czyli jest to 345 lub 435.
Jeżeli utworzona liczba dzieli się przez 4, to musi być parzysta, więc jest to 354 lub 534. Żadna z tych liczb nie dzieli się przez 4.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Rozwinięcie dziesiętne ułamka jest równe 0,(285714).
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Ułamek ten jest równy
A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{3}{7}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Obliczamy $\frac{1}{7}$ (dzieląc pisemnie) i mamy

$$\frac{1}{7} = 0,(142857).$$

W takim razie poprawną odpowiedzią musi być $\frac{2}{7}$.

Sposób II

Jeżeli oznaczymy $x = 0,(285714)$, to

$$1000000x = 285714,(285714) = 285714 + x$$
$$999999x = 285714$$
$$x = \frac{285714}{999999} = \frac{31746}{111111} = \frac{31746}{7 \cdot 15873} = \frac{2}{7}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $\sqrt[3]{\frac{40}{1250}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1920}{27}}$ jest równa
A) $\frac{8\sqrt[3]{15}}{15}$ B) $8\sqrt[3]{15}$ C) 8 D) $\frac{8}{\sqrt[3]{15}}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt[3]{\frac{40}{1250}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1920}{27}} = \sqrt[3]{\frac{40}{1250} \cdot \frac{1920}{27}} = \sqrt[3]{\frac{40}{125} \cdot \frac{192}{27}} = \frac{\sqrt[3]{40 \cdot 192}}{\sqrt[3]{5^3 \cdot 3^3}} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 8 \cdot 64 \cdot 3}}{15} = \frac{2 \cdot 4\sqrt[3]{5 \cdot 3}}{15} = \frac{8\sqrt[3]{15}}{15}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Dane są liczby a i b takie, że $-3 < a < -2$ oraz $-2 < b < 2$.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Iloraz $\frac{b}{a}$ jest zawsze ujemny.	**P**	**F**
Różnica $b - a$ jest zawsze dodatnia.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że liczby $a = -2,5$ i $b = 1$ spełniają dane warunki, więc iloraz $\frac{b}{a}$ nie musi być dodatni. Ponadto

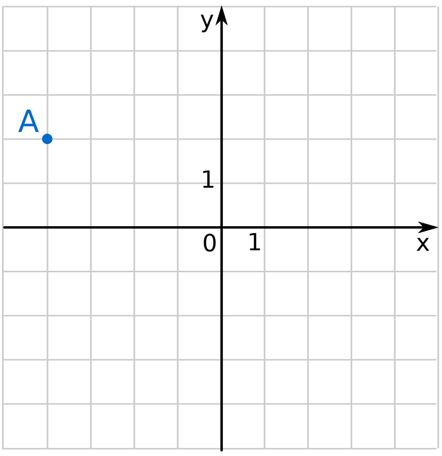
$$a < -2 < b,$$

więc różnica $b - a$ jest zawsze dodatnia.

Odpowiedź: **F, P**

ZADANIE 7 (1 PKT)

W układzie współrzędnych zaznaczono punkt A.

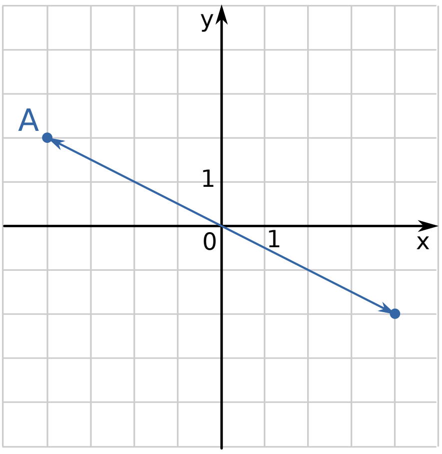


Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Punkt symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych ma współrzędne

A) $(2, -4)$ B) $(-2, 4)$ C) $(-4, 2)$ D) $(4, -2)$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy punkt, o którym mowa w treści zadania.

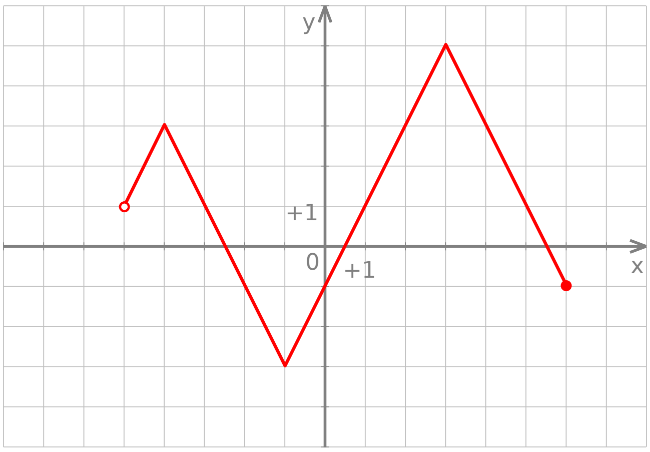


Punkt A ma współrzędne $(-4,2)$, więc punkt symetryczny do A względem początku układu współrzędnych ma współrzędne $(4,-2)$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja przyjmuje wartość największą dla argumentu 4.	**P**	**F**
Funkcja przyjmuje wartość 0 dla czterech argumentów.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje największą wartość w punkcie $x = 3$.

Z wykresu widać też, że wartość 0 funkcja przyjmuje w trzech punktach.

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Właściciel sklepu zyskuje 12% z wartości każdej sprzedanej pary obuwia. Ile par tenisówek, których cena wynosi 80 zł, musi sprzedać, aby zyskać 2400 zł?
Wybierz odpowiedź spośród podanych.
A) 250 B) 200 C) 240 D) 300

ROZWIĄZANIE

Na jednej parze tenisówek właściciel sklepu zyskuje

$$12\% \cdot 80 = \frac{12}{100} \cdot 80 = 9,6 \text{ zł}.$$

W takim razie zysk w wysokości 2400 zł wymaga sprzedania

$$\frac{2400}{9,6} = \frac{1200}{4,8} = \frac{600}{2,4} = \frac{300}{1,2} = \frac{100}{0,4} = \frac{1000}{4} = 250$$

par tenisówek.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Cenę telewizora obniżono o 15%, a następnie o 2%. Klient kupił telewizor po obniżonej cenie i dzięki temu zapłacił o 501 zł mniej, niż zapłaciłby przed obniżkami.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Przed obniżkami ten telewizor kosztował
A) 2947 zł B) 4000 zł C) 3000 zł D) 2840 zł

ROZWIĄZANIE

Niech x oznacza cenę telewizora przed obniżkami. Po pierwszej obniżce telewizor kosztował

$$85\%x = \frac{85}{100}x = \frac{17}{20}x.$$

Po drugiej obniżce telewizor kosztował

$$98\% \cdot \frac{17}{20}x = \frac{49}{50} \cdot \frac{17}{20} = \frac{833}{1000}x.$$

W takim razie cenę obniżono o

$$x - \frac{833}{1000}x = \frac{167}{1000}x.$$

Stąd

$$\frac{167}{1000}x = 501 \quad / \cdot \frac{1000}{167}$$
$$x = 501 \cdot \frac{1000}{167} = 3 \cdot 1000 = 3000.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Liczby a i b są dwucyfrowe oraz liczba b powstaje z a w wyniku zapisania cyfr liczby a w odwrotnej kolejności.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $a+b$ jest zawsze podzielna przez 11.	**P**	**F**
Liczba $a-b$ jest zawsze podzielna przez 9.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Jeżeli $a = 10x + y$, to $b = 10y + x$ i mamy

$$a + b = 10x + y + 10y + x = 11x + 11y$$
$$a - b = 10x + y - (10y + x) = 9x - 9y.$$

To oznacza, że faktycznie $a + b$ dzieli się przez 11, a liczba $a - b$ dzieli się przez 9.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba 9 razy mniejsza od 27^4 jest równa

A) 3^4 B) 3^{14} C) 9^5 D) 27^2

ROZWIĄZANIE

Liczymy

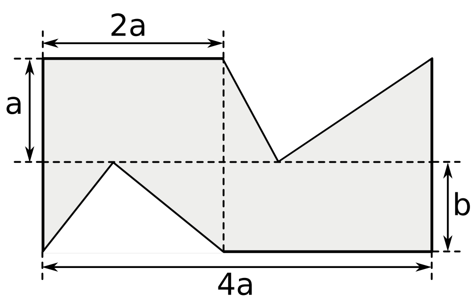
$$\frac{1}{9} \cdot 27^4 = \frac{1}{3^2} \cdot (3^3)^4 = \frac{1}{3^2} \cdot 3^{12} = 3^{10} = (3^2)^5 = 9^5.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

Pole wielokąta przedstawionego na rysunku opisuje wyrażenie algebraiczne



A) $2a(a+b)$ B) $4a^2 - ab$ C) $3a(a+b)$ D) $4a^2 - 3ab$

ROZWIĄZANIE

Wielokąt przedstawiony na rysunku to prostokąt o bokach długości $4a$ i $a+b$ z wyciętymi dwoma trójkątami. Jego pole jest więc równe

$$\begin{aligned} 4a(a+b) - \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b - \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a &= 4a^2 + 4ab - ab - a^2 = \\ &= 3a^2 + 3ab = 3a(a+b). \end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Tomek otrzymał z sześciu sprawdzianów z matematyki następujące oceny: 5, 4, 2, 3, 2, 3. Po kolejnych dwóch sprawdzianach średnia ocen Tomka ze wszystkich sprawdzianów wyniosła 3,5. Jakie oceny mógł otrzymać Tomek z ostatnich dwóch sprawdzianów?
Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 4 i 4 B) 4 i 5 C) 3 i 4 D) 5 i 3

ROZWIĄZANIE

Jeżeli Tomek z dwóch ostatnich sprawdzianów otrzymał oceny x i y, to mamy równanie

$$\begin{aligned} &\frac{5+4+2+3+2+3+x+y}{8} = 3,5 \quad / \cdot 7 \\ &19 + x + y = 28 \\ &x + y = 9. \end{aligned}$$

Wśród podanych odpowiedzi tylko para 4 i 5 spełnia ten warunek.

Odpowiedź: **B**

Informacja do zadań 15 i 16

W tabeli przedstawiono informacje dotyczące cen akcji trzech firm w dwóch różnych wybranych dniach tego samego roku.

Firma	Cena 1 akcji w dniu 1 lutego	Cena 1 akcji w dniu 31 sierpnia
Salceson S.A.	15 zł	18 zł
Kabanos S.A.	24 zł	36 zł
Salami S.A.	96 zł	64 zł

ZADANIE 15 (1 PKT)

Pan Tomasz 1 lutego za 1410 zł kupił pewną liczbę akcji firm Salceson S.A. i Kabanos S.A. Wszystkie kupione akcje sprzedał 31 sierpnia za kwotę 1980 zł.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Liczba akcji firmy Kabanos S.A, które Pan Tomasz kupił 1 lutego jest równa

A) 36 B) 18 C) 58 D) 40

ROZWIĄZANIE

Jeżeli pan Tomasz kupił x akcji firmy Salceson S.A. i y akcji firmy Kabanos S.A. to mamy układ równań

$$\begin{cases} 15x + 24y = 1410 & / : 3 \\ 18x + 36y = 1980 & / : 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 8y = 470 \\ x + 2y = 110. \end{cases}$$

Podstawiamy $x = 110 - 2y$ z drugiego równania do pierwszego

$$5(110 - 2y) + 8y = 470$$
$$550 - 470 = 2y \quad \Rightarrow \quad y = 40.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 16 (1 PKT)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

W okresie między 1 lutego a 31 sierpnia procentowy wzrost ceny akcji firmy Salceson S.A. by wyższy niż procentowy wzrost ceny akcji firmy Kabanos S.A.	**P**	**F**
Łączna wartość 40 akcji firmy Kabanos S.A. i 10 akcji firmy Salami S.A. była wyższa w dniu 31 sierpnia niż 1 lutego.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

W podanym okresie akcje firmy Salceson S.A. wzrosły o 3 zł, czyli o

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

W tym samym czasie akcje firmy Kabanos S.A. wzrosły o 12 zł, czyli o

$$\frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Za 40 akcji firmy Kabanos S.A. i 10 akacji Salami S.A. na początku lutego trzeba było zapłacić

$$40 \cdot 24 + 10 \cdot 96 = 1920.$$

Te same akcje na koniec sierpnia były warte

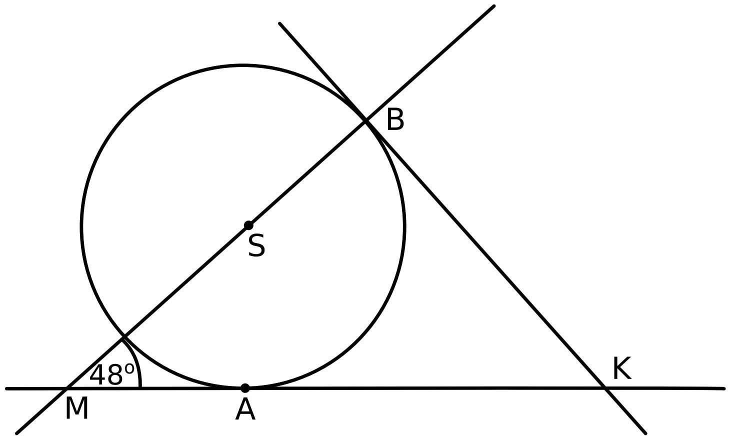
$$40 \cdot 36 + 10 \cdot 64 = 2080.$$

W takim razie wartość tych akcji wzrosła.

Odpowiedź: F, P

ZADANIE 17 (1 PKT)

Proste KA i KB są styczne do okręgu o środku S w punktach A i B, a kąt BMA ma miarę 48° (rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kąt AKB jest równy

A) 58° B) 52° C) 48° D) 42°

ROZWIĄZANIE

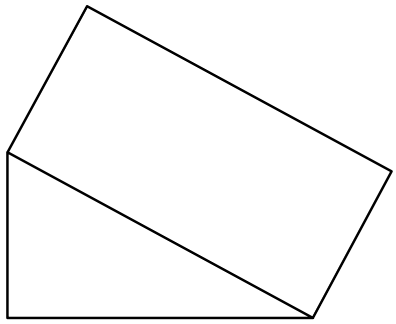
Ponieważ styczna KB jest prostopadła do promienia SB, to trójkąt MKB jest prostokątny. Zatem

$$\measuredangle AKB = 90^\circ - \measuredangle BMA = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 3 zbudowano prostokąt o jednym boku długości 1.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość przekątnej tego prostokąta jest równa

A) 3 B) $\sqrt{10}+1$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{11}$

ROZWIĄZANIE

Przeciwprostokątna trójkąta ma długość

$$\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10},$$

więc przekątna prostokąta ma długość

$$\sqrt{10+1} = \sqrt{11}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 19 (1 PKT)

Ściany sześciennej kostki ponumerowano liczbami od 1 do 6. Następnie w sposób losowy wybrano jedną z krawędzi tego sześcianu.
Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.
Prawdopodobieństwo zdarzenia polegające na tym, że wylosowana krawędź jest krawędzią ściany z numerem 6 jest równe
A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$

ROZWIĄZANIE

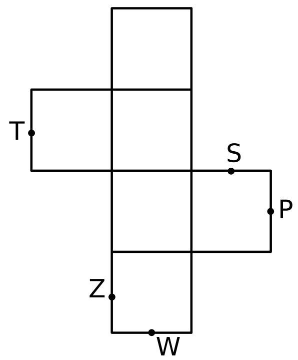
Sześcian ma 12 krawędzi i 4 z nich są krawędziami ściany z numerem 6. Więc interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 20 (1 PKT)

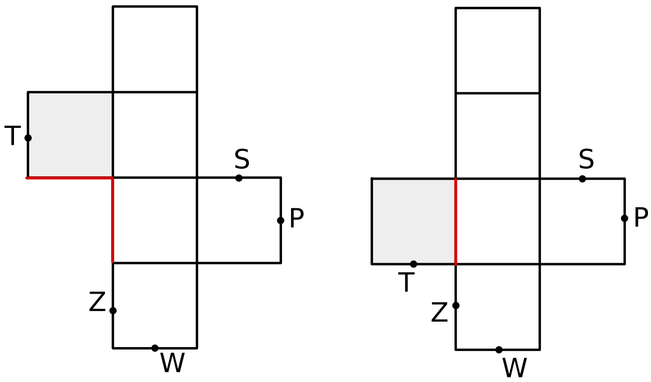
Na rysunku poniżej przedstawiono siatkę sześcianu. Punkty: P, S, T, W, Z są środkami jego krawędzi.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Po złożeniu sześcianu z tej siatki punkt T pokryje się z punktem
A) P B) S C) W D) Z

ROZWIĄZANIE

Zmieńmy siatkę sześcianu tak, jak na rysunku poniżej (zmieniamy położenie zacienionej ściany).

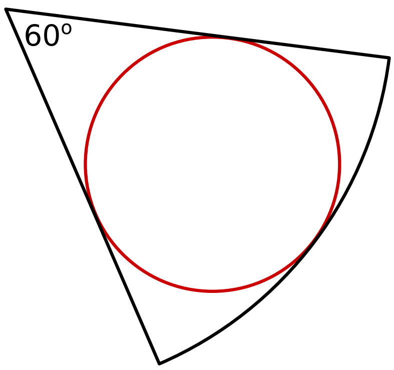


Powinno teraz być jasne, że po złożeniu sześcianu punkt T pokryje się punktem Z.

Odpowiedź: D

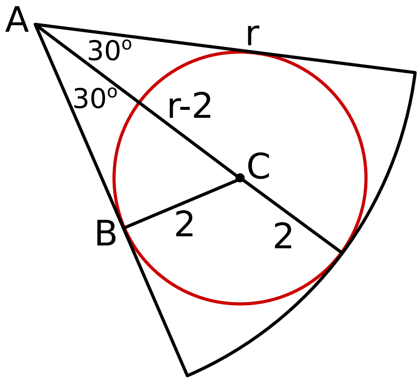
ZADANIE 21 (3 PKT)

W wycinek koła o kącie 60° wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego wycinka.



ROZWIĄZANIE

Zaznaczmy środek wpisanego okręgu i połączmy go z punktami styczności.



Utworzony trójkąt ABC jest prostokątny oraz $\measuredangle BAC = 30^\circ$ (bo S leży na dwusiecznej kąta o wierzchołku A). Jest to więc połówka trójkąta równobocznego i

$$AC = 2BC$$
$$r - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 6.$$

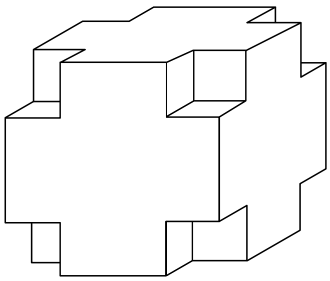
W takim razie pole wycinka jest równe

$$\frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{1}{6} \cdot 36\pi = 6\pi \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: 6π **cm**^{2}

ZADANIE 22 (3 PKT)

Z sześcianu zbudowanego z 125 małych sześcianów o krawędzi 1 cm usunięto z każdego narożnika po jednym małym sześcianie (patrz rysunek). Oblicz pole powierzchni powstałej bryły.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że usuwając mały sześcian z naroża, usuwamy z powierzchni dużego sześcianu 3 kwadraty o krawędzi 1. Jednocześnie do powierzchni otrzymanej bryły dodajemy trzy nowe kwadraty o boku długości 1. W takim razie pole powierzchni bryły przedstawionej na rysunku jest takie samo jak pole powierzchni wyjściowego sześcianu i wynosi

$$6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: 150 **cm**^{2}

ZADANIE 23 (4 PKT)

Dwie maszyny produkcyjne miały wyprodukować łącznie 10240 plastikowych pojemników. Po zakończeniu produkcji okazało się, że jedna z maszyn przekroczyła plan o 15%, a druga o 20% i w sumie maszyny wyprodukowały 12096 pojemników. Ile pojemników wyprodukowała każda z maszyn?

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez x i y planowaną wielkość produkcji odpowiednio pierwszej i drugiej maszyny, to mamy układ równań

$$\begin{cases} x + y = 10240 \\ 1,15x + 1,2y = 12096. \end{cases}$$

Podstawiamy $x = 10240 - y$ z pierwszego równania do drugiego.

$$\begin{aligned} &1,15(10240 - y) + 1,2y = 12096 \\ &11776 - 1,15y + 1,2y = 12096 \\ &0,05y = 320 \quad / \cdot 20 \\ &y = 6400. \end{aligned}$$

Rzeczywista wielkość produkcji drugiej maszyny wyniosła więc

$$1,2y = 1,2 \cdot 6400 = 7680.$$

Pierwsza maszyna wyprodukowała więc

$$12096 - 7680 = 4416$$

pojemników.

Odpowiedź: **4416 i 7680**