EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

24 KWIETNIA 2014

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

Promocja w zakładzie optycznym jest związana z wiekiem klienta i polega na tym, że klient otrzymuje tyle procent zniżki, ile ma lat.

ZADANIE 1 (1 PKT)

Cena okularów bez promocji wynosi 240 zł. Ile zapłaci za te okulary klient, który ma 35 lat? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 84 zł B) 132 zł C) 156 zł D) 205 zł

ROZWIĄZANIE

Klient, który ma 35 lat otrzyma 35% zniżki, więc zapłaci

$$240 \cdot 65\% = 240 \cdot \frac{65}{100} = 24 \cdot \frac{65}{10} = 12 \cdot \frac{65}{5} = 12 \cdot 13 = 156 \text{ zł}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Okulary bez promocji kosztują 450 zł, a klient zgodnie z obowiązującą promocją może je kupić za 288 zł. Ile lat ma ten klient? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 64 B) 56 C) 44 D) 36

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\frac{288}{450} = \frac{32}{50} = \frac{64}{100} = 64\%.$$

Zatem $288 = 450 \cdot 64\%$, co oznacza, że klient otrzymał 36% zniżki. Ma więc 36 lat.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Sześć maszyn produkuje pewną partię jednakowych butelek z tworzywa sztucznego przez 4 godziny. Każda z maszyn pracuje z taką samą stałą wydajnością.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Przez 8 godzin taką samą partię butelek wykonają 3 takie maszyny.	**P**	**F**
Połowę partii takich butelek 6 maszyn wykona przez 2 godziny.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Przez godzinę sześć maszyn wykonuje $\frac{1}{4}$ partii butelek, czyli jedna maszyna przez godzinę wykonuje $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ partii butelek.

Ponieważ

$$3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{24} = 1$$

3 maszyny przez 8 godzin rzeczywiście wykonają całą partię butelek.

Ponadto

$$6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{2},$$

więc faktycznie 6 maszyn w ciągu dwóch godzin wykonuje połowę partii butelek.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczbą większą od $\frac{1}{3}$ jest

A) $\frac{300}{900}$ B) $\frac{300}{900-1}$ C) $\frac{300}{900+1}$ D) $\frac{300-1}{900}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\frac{300}{900-1} > \frac{300}{900} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dane są liczby: $3, 3^4, 3^{12}$.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Iloczyn tych liczb jest równy

A) 3^{16} B) 3^{17} C) 3^{48} D) 3^{49}

ROZWIĄZANIE

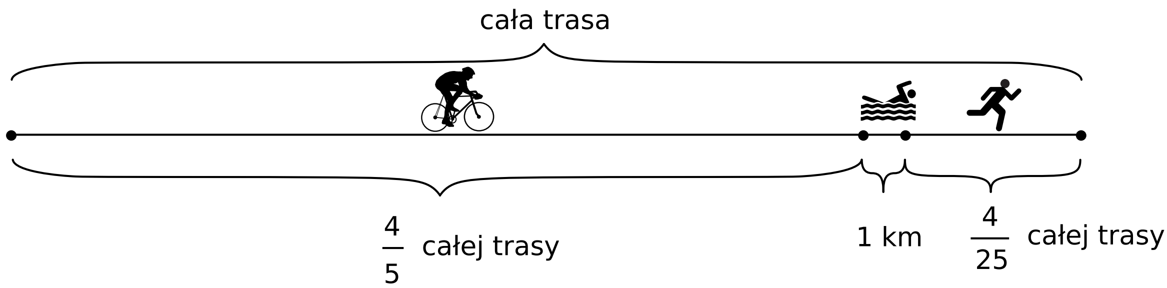
Liczymy

$$3 \cdot 3^4 \cdot 3^{12} = 3^{1+4+12} = 3^{17}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 6 (1 PKT)

W zawodach sportowych każdy zawodnik miał pokonać trasę składającą się z trzech części. Pierwszą część trasy zawodnik przejechał na rowerze, drugą część – prowadzącą przez jezioro – przepłynął, a trzecią – przebiegł. Na rysunku przedstawiono schemat tej trasy.



Na podstawie informacji wybierz zdanie prawdziwe.
A) Cała trasa miała długość 50 km.
B) Zawodnik przebiegł 8 km.
C) Odległość, którą zawodnik przebiegł, była o 4 km większa od odległości, którą przepłynął.
D) Odległość, którą zawodnik przejechał na rowerze, była 5 razy większa od odległości, którą przebiegł.

ROZWIĄZANIE

Obliczmy jaką część trasy zawodnik pokonał płynąc

$$1-\frac{4}{5}-\frac{4}{25}=\frac{25-20-4}{25}=\frac{1}{25}.$$

Z drugiej strony wiemy, że odległość ta jest równa 1 km, więc cała trasa musi mieć długość 25 km.

Zawodnik przejechał na rowerze

$$\frac{4}{5}\cdot 25=20 \text{ km}.$$

Zawodnik przebiegł

$$\frac{4}{25}\cdot 25=4 \text{ km}.$$

Odległość ta jest 5 razy mniejsza od odległości, którą przejechał na rowerze.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Liczba $\sqrt{120}$ znajduje się na osi liczbowej między
A) 10 i 11 B) 11 i 12 C) 12 i 20 D) 30 i 40

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$120 > 100 = 10^2$$
$$120 < 121 = 11^2.$$

Zatem

$$10 < \sqrt{120} < 11.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 8 (1 PKT)

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{51}{370}$ jest równe 0,1(378).
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Na pięćdziesiątym miejscu po przecinku tego rozwinięcia znajduje się cyfra
A) 1 B) 3 C) 7 D) 8

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że cyfry rozwinięcia dziesiętnego powtarzają się co 3, oraz

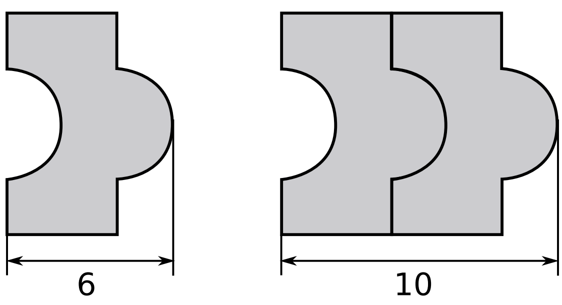
$$50 = 48 + 2 = 3 \cdot 16 + 2.$$

W takim razie pięćdziesiąta cyfra tego rozwinięcia jest taka sama jak cyfra druga, czyli jest równa 3.

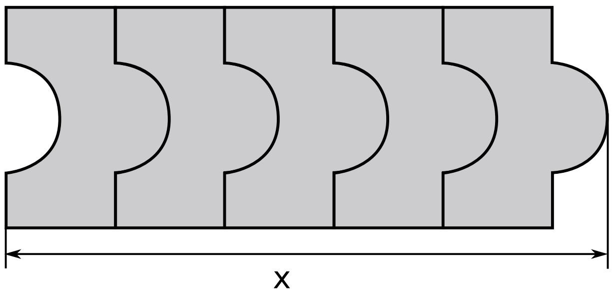
Odpowiedź: B

Informacja do zadań 9 i 10

Na rysunkach przedstawiono kształt i sposób układania płytek oraz niektóre wymiary w centymetrach.



Ułożono wzór z 5 płytek, jak na rysunku.



ZADANIE 9 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Odcinek x ma długość
A) 20 cm B) 22 cm C) 26 cm D) 30 cm

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że jak od szerokości wzoru złożonego z dwóch płytek odejmiemy szerokość jednej płytki, to otrzymamy szerokość dolnego boku płytki (czyli szerokość płytki bez wystającego półokręgu). Zatem dolna podstawa płytki ma długość $10 - 6 = 4$.

Aby otrzymać szerokość wzoru składającego się z 5 płytek musimy dodać szerokość 4 podstaw płytek oraz szerokość jednej całej płytki. Jest więc ona równa

$$x = 4 + 4 + 4 + 4 + 6 = 16 + 6 = 22.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Które wyrażenie algebraiczne opisuje długość analogicznego do x odcinka dla wzoru złożonego z n płytek? **Wybierz odpowiedź spośród podanych.**
A) $6n$ B) $6n - 4$ C) $4n - 2$ D) $4n + 2$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że jak od szerokości wzoru złożonego z dwóch płytek odejmiemy szerokość jednej płytki, to otrzymamy szerokość dolnego boku płytki (czyli szerokość płytki bez wystającego półokręgu). Zatem dolna podstawa płytki ma długość $10 - 6 = 4$.

Aby otrzymać szerokość wzoru składającego się z n płytek musimy dodać szerokość $(n-1)$ podstaw płytek oraz szerokość jednej całej płytki. Jest więc ona równa

$$x = 4(n-1) + 6 = 4n + 2.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Prędkość średnia piechura na trasie 10 km wyniosła 5 km/h, a prędkość średnia rowerzysty na tej samej trasie była równa 20 km/h. **O ile minut więcej zajęło pokonanie tej trasy piechurowi niż rowerzyście? Wybierz odpowiedź spośród podanych.**

A) 30 minut B) 60 minut C) 90 minut D) 120 minut

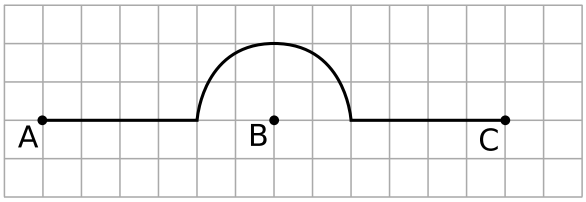
ROZWIĄZANIE

Piechur daną trasę pokonał w 2 godziny, a rowerzysta w 1/2 godziny. Piechur szedł więc o 1,5 h dłużej.

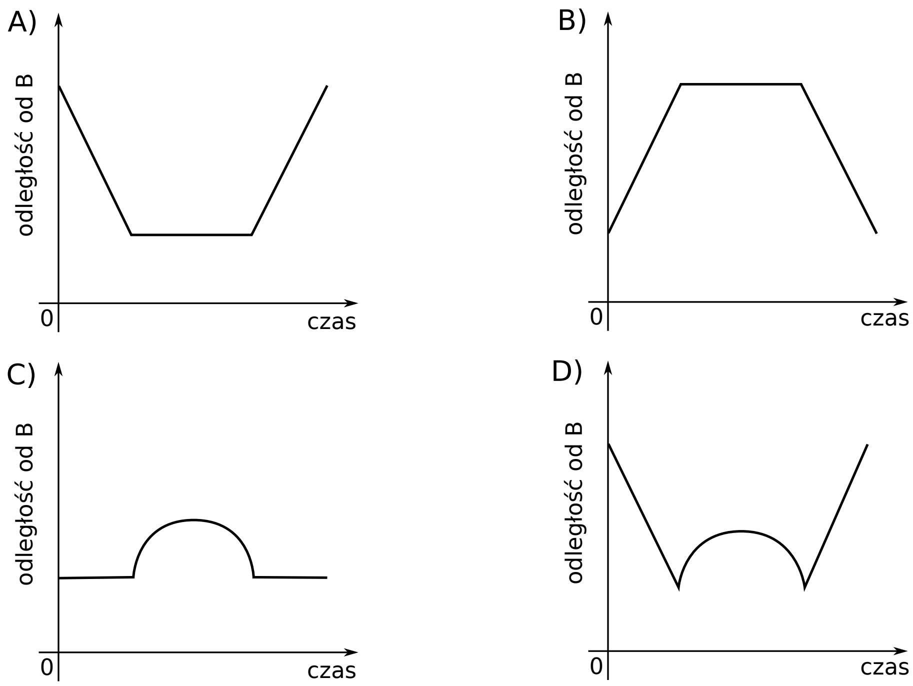
Odpowiedź: **C**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Piechur szedł z punktu *A* do punktu *C* ze stałą prędkością. Część trasy przeszedł wzdłuż prostej, a część – po łuku okręgu o środku w punkcie *B* (patrz rysunek).



Na którym z poniższych wykresów zilustrowano, jak zmieniała się odległość piechura od punktu B? Wybierz odpowiedź spośród podanych.



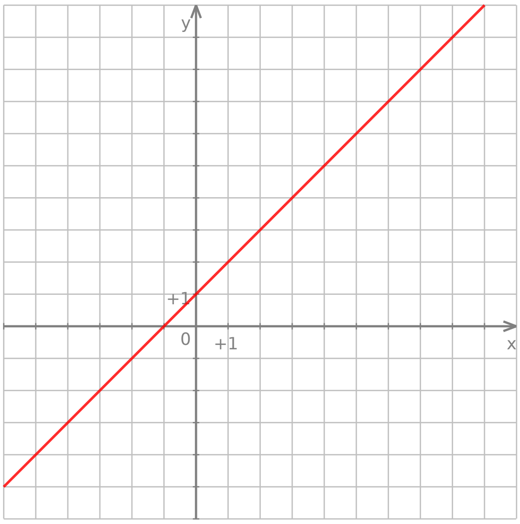
ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trakcie pokonywania trasy z A do B, odległość od B najpierw maleje, potem jest stała (gdy piechur idzie po łuku okręgu), a potem rośnie. Taka sytuacja ma miejsce tylko na wykresie A.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 13 (1 PKT)

W prostokątnym układzie współrzędnych przedstawiono wykres funkcji.

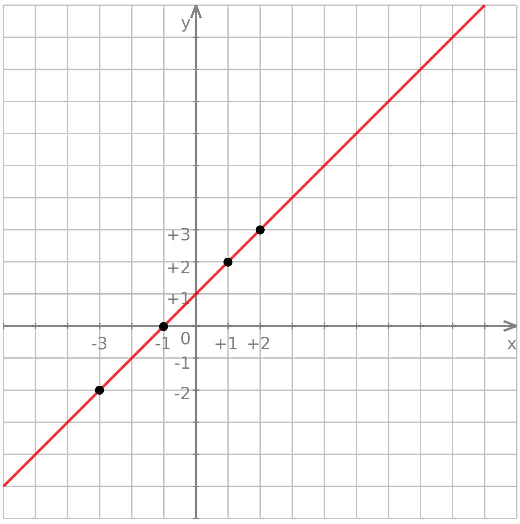


Które z poniższych zdań jest fałszywe? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) Dla argumentu 2 wartość funkcji jest równa 3.
B) Funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu 1.
C) Wartość funkcji jest równa -2 dla argumentu -3.
D) Dla argumentów większych od -1 wartości funkcji są dodatnie.

ROZWIĄZANIE

Odczytujemy z wykresu.



Wartość dla argumentu 2 to 3, wartość dla argumentu 1 to 2, wartość dla argumentu -3 to -2. Ponadto funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wykres jest powyżej osi Ox) dla $x > -1$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Oznaczmy przez p_2 prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby podzielnej przez 2, a przez p_3 – prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby podzielnej przez 3.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba p_2 jest mniejsza od liczby p_3.	**P**	**F**
Liczby p_2 i p_3 są mniejsze od $\frac{1}{6}$	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Liczby podzielne przez 2 to: 2, 4, 6, a liczby podzielne przez 3 to 3 i 6. Zatem

$$p_2 = \frac{3}{6} > p_3 = \frac{2}{6}.$$

Obie liczby są oczywiście większe od $\frac{1}{6}$.

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Ola codziennie, przez tydzień, odczytywała o 7 rano temperaturę powietrza. Oto podane (w °C) wyniki jej pomiarów: $-2, 3, 4, 0, -3, 2, 3$.

	Średnia arytmetyczna (°C)	Mediana (°C)	Amplituda (°C)
A)	7	0	1
B)	1	0	7
C)	7	2	1
D)	1	2	7

Wybierz odpowiedź, w której podano poprawne wartości średniej arytmetycznej, mediany i amplitudy (różnica między wartością najwyższą i wartością najniższą) zanotowanych temperatur.

ROZWIĄZANIE

Średnia arytmetyczna odczytów jest równa

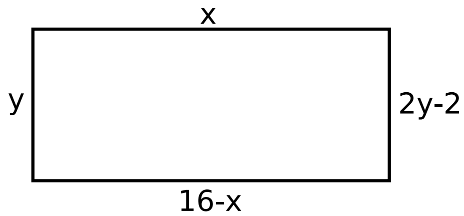
$$\frac{-2+3+4+0-3+2+3}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Amplituda to $4-(-3) = 7$. Aby wyznaczyć medianę wypisujemy dane w kolejności rosnącej: $-3, -2, 0, 2, 3, 3, 4$. Mediana to liczba środkowa, czyli 2.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono prostokąt, którego wymiary są opisane za pomocą wyrażeń.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeden z boków prostokąta ma długość 8.	**P**	**F**
Obwód prostokąta jest równy 20.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Ponieważ przeciwległe boki prostokąta mają równe długości, mamy

$$\begin{aligned} x &= 16-x \quad \Rightarrow \quad 2x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \\ y &= 2y-2 \quad \Rightarrow \quad 2 = y. \end{aligned}$$

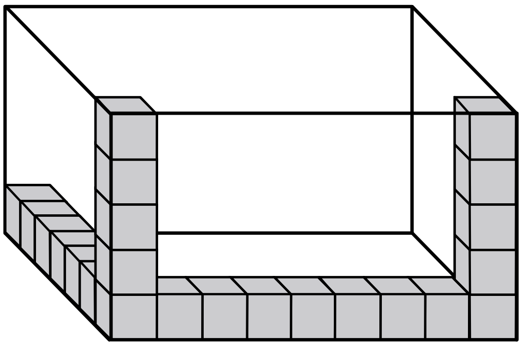
Obwód prostokąta jest więc równy

$$2\cdot 8 + 2\cdot 2 = 16+4 = 20.$$

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Szymon wykonał szkielet prostopadłościanu. Układał i sklejał ze sobą kolejno drewniane klocki sześcienne o krawędzi 4 cm wzdłuż każdej krawędzi prostopadłościennego pudełka o wymiarach: 36 cm, 28 cm, 20 cm. Na rysunku przedstawiono część wykonanego szkieletu.



Ile klocków łącznie zużył Szymon na wykonanie całego szkieletu? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 84 B) 76 C) 68 D) 60

ROZWIĄZANIE

Umieszczamy klocki następująco. Najpierw umieszczamy $4 \cdot 9 = 36$ klocków wzdłuż najdłuższych krawędzi pudełka (wzdłuż każdej z tych krawędzi mieści się 9 klocków). Potem umieszczamy klocki wzdłuż krawędzi długości 28 cm – zauważmy, że na końcach tych krawędzi są już klocki (w narożnikach pudełka), więc wzdłuż każdej z tych krawędzi zmieści się 5 klocków. W sumie dokładamy więc $4 \cdot 5 = 20$ klocków. Na koniec umieszczamy klocki wzdłuż krawędzi długości 20 cm – przy każdej z tych krawędzi zmieszczą się 3 klocki (bo na końcach już są), więc dokładamy $4 \cdot 3 = 12$ klocków. W sumie potrzeba więc

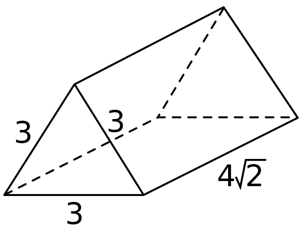
$$36 + 20 + 12 = 68$$

klocków.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty i jego wymiary.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Objętość tego graniastosłupa jest równa

A) $9\sqrt{6}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{6}$ D) $36\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

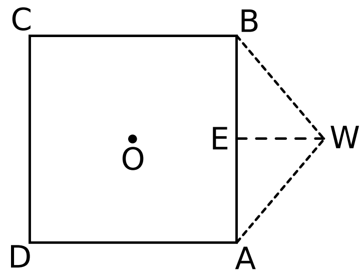
Graniastosłup leży na boku, co może być trochę mylące, ale jego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości $a = 3$, a wysokość jest równa $H = 4\sqrt{2}$. Objętość graniastosłupa jest więc równa

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{2} = 9\sqrt{6}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 19 (1 PKT)

Maciek rysuje siatkę ostrosłupa prawidłowego, którego podstawą jest kwadrat o środku w punkcie O i boku długości 8.



Czy trójkąt ABW o bokach długości odpowiednio: 8, 5, 5 może być ścianą boczną takiego ostrosłupa? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	NIE

ponieważ

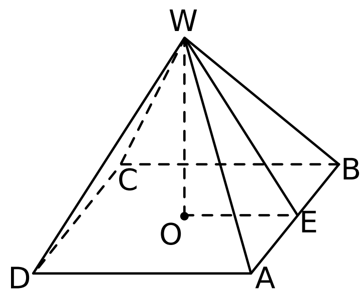
A)	trójkąt ABW jest równoramienny.
B)	odległość OE jest mniejsza niż wysokość EW trójkąta ABW.
C)	odległość OE jest większa niż wysokość EW trójkąta ABW.

ROZWIĄZANIE

Obliczmy najpierw długość wysokości EW trójkąta AWB.

$$EW = \sqrt{AW^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

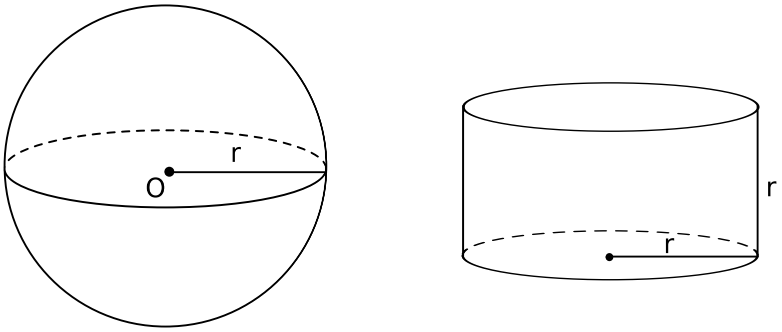
Ponieważ $EW < EO = 4$, z takiej siatki nie da się zbudować ostrosłupa.



Odpowiedź: **NIE, C**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Dane są kula o środku w punkcie O i promieniu r oraz walec o promieniu podstawy r i wysokości r.



Na podstawie informacji wybierz zdanie prawdziwe.
A) Objętość kuli jest równa objętości walca.
B) Objętość kuli jest 2 razy większa od objętości walca.
C) Objętość walca stanowi $\frac{3}{4}$ objętości kuli.
D) Objętość walca jest 3 razy mniejsza od objętości kuli.

ROZWIĄZANIE

Podane figury mają objętości:

$$\text{kula: } \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\text{walec: } \pi r^2 \cdot r = \pi r^3.$$

Widać zatem, że objętość walca stanowi $\frac{3}{4}$ objętości kuli.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 21 (3 PKT)

Cena godziny korzystania z basenu wynosi 12 zł. Można jednak kupić miesięczną kartę rabatową za 50 złotych, upoważniającą do obniżki cen, i wtedy za pierwsze 10 godzin pływania płaci się 8 złotych za godzinę, a za każdą następną godzinę – 9 złotych. Wojtek kupił kartę rabatową i korzystał z basenu przez 16 godzin. Czy zakup karty był dla Wojtka opłacalny? Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Gdyby Wojtek nie kupił karty rabatowej, to za 16 godzin pływania zapłaciłby

$$16 \cdot 12 = 192 \text{ zł.}$$

Z kartą rabatową zapłacił

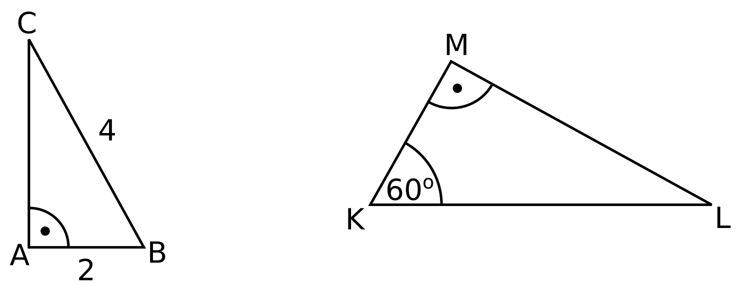
$$50 + 10 \cdot 8 + 6 \cdot 9 = 50 + 80 + 54 = 184 \text{ zł.}$$

Zakup karty był więc opłacalny.

Odpowiedź: **Zakup karty był opłacalny.**

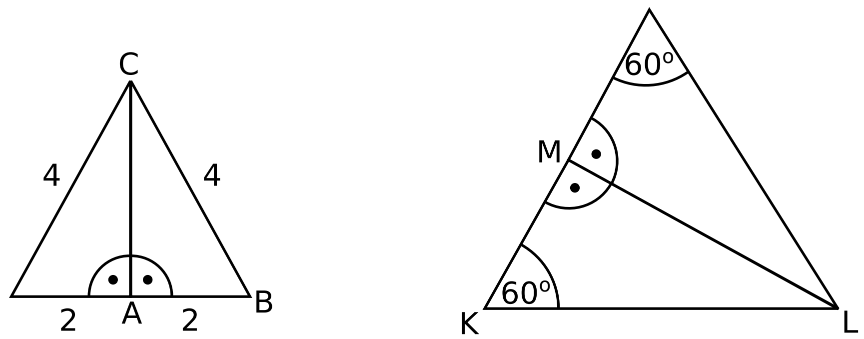
ZADANIE 22 (2 PKT)

Uzasadnij, że trójkąty prostokątne ABC i KLM przedstawione na rysunku są podobne.



ROZWIĄZANIE

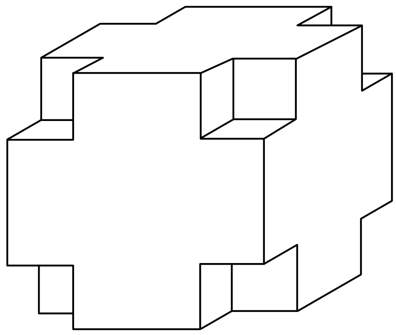
Zauważmy, że każdy z narysowanych trójkątów prostokątnych jest połówką trójkąta równobocznego.



To oznacza, że każdy z tych trójkątów ma kąty o miarach: 90°, 60°, 30°. Trójkąty te są więc podobne.

ZADANIE 23 (3 PKT)

Z sześcianu zbudowanego z 64 małych sześcianów o krawędzi 1 cm usunięto z każdego narożnika po jednym małym sześcianie (patrz rysunek). Oblicz pole powierzchni powstałej bryły i porównaj je z polem powierzchni dużego sześcianu. Zapisz obliczenia.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że usuwając mały sześcian z naroża, usuwamy z powierzchni dużego sześcianu 3 kwadraty o krawędzi 1. Jednocześnie do powierzchni otrzymanej bryły dodajemy trzy nowe kwadraty o boku długości 1. W takim razie pole powierzchni bryły przedstawionej na rysunku jest takie samo jak pole powierzchni wyjściowego sześcianu i wynosi

$$6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: **Pole bryły=pole sześcianu=96 cm^2**