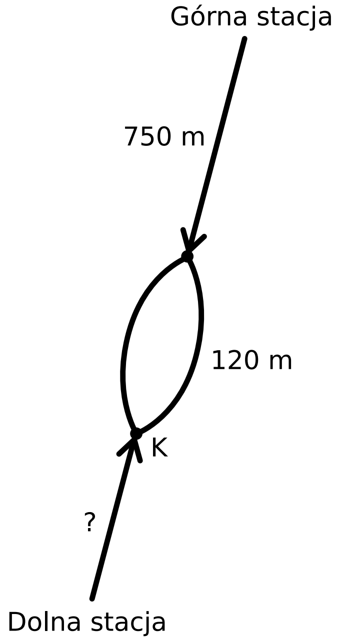
EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

22 KWIETNIA 2015

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

Każda z dwóch kolejek górskich przebywa drogę 150 metrów w ciągu minuty. Na schemacie zaznaczono niektóre długości trasy pokonywanej przez kolejki.



ZADANIE 1 (1 PKT)

Jak długo trwa przejazd kolejki od górnej stacji do punktu K? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) 5 minut B) 5 minut i 8 sekund C) 5 minut i 48 sekund D) 6 minut

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Odległość od górnej stacji do punktu K jest równa

$$750 + 120 = 870 \text{ m}.$$

Zauważmy jeszcze, że kolejka pokonuje dystans 10 m w czasie

$$\frac{60}{15} = 4 \text{ sekund}.$$

W takim razie dystans 870 metrów pokona w czasie

$$87 \cdot 4 = 174 \cdot 2 = 348 \text{ sekund},$$

czyli w czasie 5 minut i 48 sekund.

Sposób II

Pierwsze $750 = 5 \cdot 150$ metrów kolejka pokona w ciągu 5 minut, a pozostałe $120 = \frac{4}{5} \cdot 150$ metrów w czasie

$$\frac{4}{5} \cdot 60 = 48 \text{ sekund.}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 2 (1 PKT)

Z górnej stacji kolejka wyjeżdża o 1 minutę wcześniej niż z dolnej. Kolejki równocześnie wjeżdżają na pętlę mijania.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość trasy kolejki od dolnej stacji do punktu K jest równa

A) 240 m B) 450 m C) 600 m D) 900 m

ROZWIĄZANIE

Jeżeli kolejka z dolnej stacji wyjechała o minutę później, niż kolejka z górnej stacji, to znaczy, że pętli mijania przejechała o 150 m mniej niż kolejka jadąca z górnej stacji. W takim razie odległość pomiędzy dolną stacją, a pętlą mijania jest równa 600 m.

Odpowiedź: C

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na osi liczbowej liczba równa wartości wyrażenia arytmetycznego $\left(1 - \frac{5}{6}\right) - 0,5$ znajduje się między

A) -1 i $-0,5$ B) $-0,5$ i 0 C) 0 i 0,5 D) 0,5 i 1

ROZWIĄZANIE

Obliczamy dane wyrażenie.

$$\left(1 - \frac{5}{6}\right) - 0,5 = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Liczba ta znajduje się na osi pomiędzy $-0,5$, a 0.

Odpowiedź: B

ZADANIE 4 (1 PKT)

Dane jest przybliżenie $\sqrt{5} \approx 2,236$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

$\sqrt{20} \approx 2 \cdot 2,236$	**P**	**F**
$\sqrt{500} \approx 22,36$	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \approx 2\cdot 2,236$$
$$\sqrt{500} = \sqrt{100\cdot 5} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{5} = 10\sqrt{5} = 10\cdot 2,236 = 22,36.$$

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Poniżej podano kilka kolejnych potęg liczby 7.

$$\begin{aligned} 7^1 &= 7 \\ 7^2 &= 49 \\ 7^3 &= 343 \\ 7^4 &= 2\,401 \\ 7^5 &= 16\,807 \\ 7^6 &= 117\,649 \\ 7^7 &= 823\,543 \\ 7^8 &= 5\,764\,801 \\ 7^9 &= 40\,353\,607 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Cyfrą jedności liczby 7^{190} jest
A) 1 B) 3 C) 7 D) 9

ROZWIĄZANIE

Jak widać na podstawie podanych potęg 7-ki, możliwe cyfry jedności tych potęg to: 7, 9, 3, 1. Ponadto cyfry te powtarzają się co 4. Ponieważ

$$190 = 188 + 2 = 4\cdot 47 + 2,$$

to ostatnia cyfra liczby 7^{190} jest taka sama jak ostatnia cyfra liczby 7^2, czyli jest równa 9.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 6 (1 PKT)

W dodatniej liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest równa 5, a cyfra setek jest o 6 mniejsza od cyfry jedności. Ile jest liczb spełniających te warunki?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A) Jedna. B) Dwie. C) Trzy. D) Cztery.

ROZWIĄZANIE

Z podanych informacji wynika, że interesująca nas liczba musi mieć postać $a5b$, gdzie $b = a+6$. Są 3 liczby takiej postaci:

$$157, \ 258, \ 359.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 7 (1 PKT)

Zmieszano dwa gatunki herbaty, droższą i tańszą, w stosunku 2:3. Cena jednego kilograma tej herbacianej mieszanki wynosi 110 zł. Gdyby te herbaty zmieszano w stosunku 1:4, to cena za 1 kg tej mieszanki wynosiłaby 80 zł. Na podstawie podanych informacji zapisano poniższy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 110 \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y = 80. \end{cases}$$

Co oznacza x w tym układzie równań? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) Cenę 1 kg herbaty droższej.

B) Cenę 1 kg herbaty tańszej.

C) Cenę 5 kg herbaty droższej.

D) Cenę 5 kg herbaty tańszej.

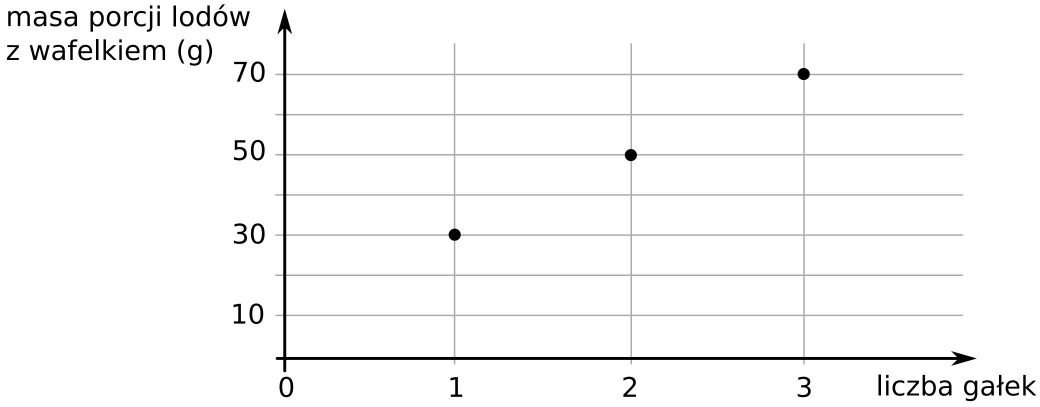
ROZWIĄZANIE

Pierwsze równanie układu zawiera informację o cenie 1 kilograma mieszanki sporządzonej w stosunku 2:3 – w równaniu tym $\frac{2}{5}x$ oznacza koszt droższej herbaty, $\frac{3}{5}x$ koszt tańszej herbaty. W szczególności x oznacza cenę jednego kilograma droższej herbaty.

Odpowiedź: A

ZADANIE 8 (1 PKT)

Na wykresie przedstawiono, jak zmienia się masa porcji lodów z wafelkiem w zależności od liczby gałek lodów.



Jaką masę ma jedna gałka tych lodów bez wafelka? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) 10 g B) 20 g C) 30 g D) 40 g

ROZWIĄZANIE

Z wykresu widzimy, że dołożenie jednej gałki lodów sprawia, że lody z wafelkiem stają się cięższe o

$$50 - 30 = 20 \text{ g}.$$

Tyle więc waży jedna gałka lodów.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 9 (1 PKT)

W konkursie przyznano nagrody pieniężne. Zdobywca pierwszego miejsca otrzymał 5000 zł. Nagroda za zdobycie drugiego miejsca była o 30% mniejsza niż nagroda za zajęcie pierwszego miejsca. Nagroda za zdobycie trzeciego miejsca była o 40% mniejsza niż nagroda za zajęcie drugiego miejsca.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Uczestnik konkursu, który zdobył trzecie miejsce, otrzymał 1400 zł.	**P**	**F**
Nagroda za zdobycie trzeciego miejsca była o 70% mniejsza od nagrody za zajęcie pierwszego miejsca.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Zdobywca drugiego miejsca otrzymał

$$70\% \cdot 5000 = \frac{7}{10} \cdot 5000 = 7 \cdot 500 = 3500 \text{ zł},$$

a zdobywca 3 miejsca otrzymał

$$60\% \cdot 3500 = \frac{6}{10} \cdot 3500 = \frac{3}{5} \cdot 3500 = 3 \cdot 700 = 2100 \text{ zł}.$$

Nagroda za zajęcie 3 miejsca stanowi

$$\frac{2100}{5000} = \frac{21}{50} = \frac{42}{100} = 42\%$$

nagrody za zajęcie pierwszego miejsca.

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Jeśli wypadnie orzeł, zapisujemy 1, a jeśli reszka – zapisujemy 2. Wynikiem doświadczenia jest zapisana liczba dwucyfrowa. **Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisana liczba jest podzielna przez 3? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

W wyniku opisanego doświadczenia możemy otrzymać 4 liczby:

$$11, \ 12, \ 21, \ 22.$$

Dwie z tych liczb są podzielne przez 3 (12 i 21), więc prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Pięć różnych liczb naturalnych zapisano w kolejności od najmniejszej do największej: $1, a, b, c, 10$.
Mediana liczb: $1, a, b$ jest równa 3, a mediana liczb: $a, b, c, 10$ jest równa 5.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba c jest równa

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

ROZWIĄZANIE

Jeżeli mediana liczb $1, a, b$ jest równa 3, to $a = 3$. Wiemy ponadto, że mediana liczb $3, b, c, 10$ jest równa 5, czyli

$$\frac{b+c}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad b + c = 10.$$

Wiemy ponadto, że $3 < b < c < 10$. Jedyne liczby naturalne spełniające te dwa warunki, to $b = 4$ i $c = 6$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Liczba x jest dodatnia, a liczba y jest ujemna.
Ile spośród liczb: $x \cdot y,\ x - y,\ \frac{x}{y},\ (y - x)^2$ **jest dodatnich? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) Jedna. B) Dwie. C) Trzy. D) Cztery.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli $x > 0$ i $y < 0$, to

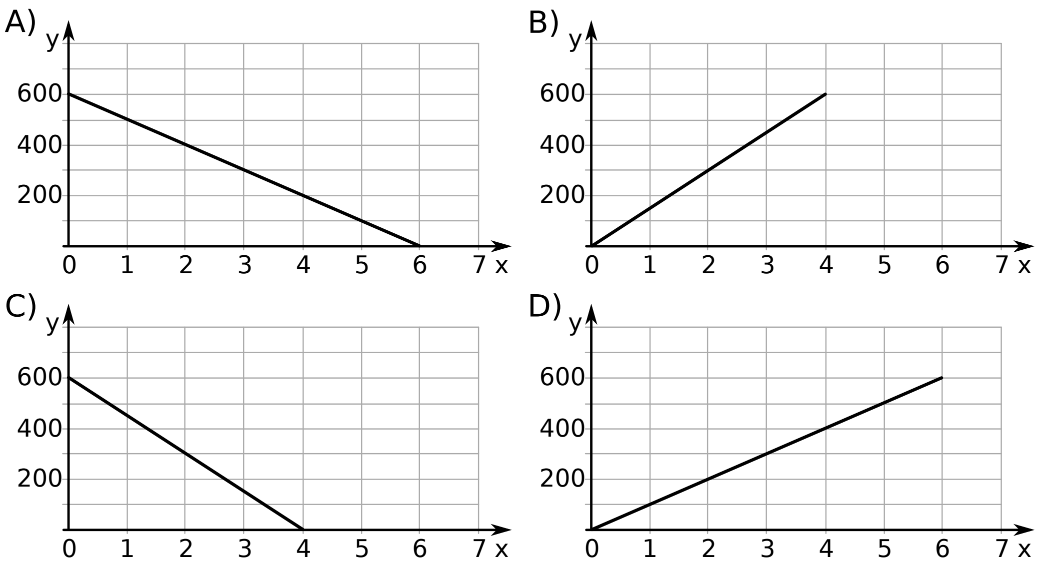
$$\begin{aligned} & xy < 0 \\ & x - y = x + (-y) > 0 \\ & \frac{x}{y} < 0 \\ & (y - x)^2 > 0. \end{aligned}$$

Wśród podanych liczb są więc 2 liczby dodatnie.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Wzór $y = 600 - 100x$ opisuje zależność objętości y (w litrach) wody w zbiorniku od czasu x (w minutach) upływającego podczas opróżniania tego zbiornika. **Który wykres przedstawia tę zależność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**



ROZWIĄZANIE

Dany wzór oznacza, że w chwili 0 (czyli dla $x = 0$) w zbiorniku jest 600 litrów wody, a po 6 minutach (czyli dla $x = 6$) zbiornik jest pusty. Taka sytuacja jest przedstawiona na wykresie A.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Jeżeli a,b i c są długościami boków trójkąta oraz c jest najdłuższym bokiem, to ten trójkąt jest:
– prostokątny, gdy $a^2+b^2=c^2$
– rozwartokątny, gdy $a^2+b^2<c^2$
– ostrokątny, gdy $a^2+b^2>c^2$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Z odcinków o długościach: $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$
A) nie można zbudować trójkąta.
B) można zbudować trójkąt prostokątny.
C) można zbudować trójkąt rozwartokątny.
D) można zbudować trójkąt ostrokątny.

ROZWIĄZANIE

Sprawdźmy najpierw, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt – w tym celu musimy sprawdzić, czy najdłuższy z nich jest krótszy od sumy dwóch pozostałych. Tak jednak jest, bo

$$3\sqrt{2}<3\cdot 1,5=4,5$$
$$2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}>3\cdot 1,6=4,8.$$

Ponieważ

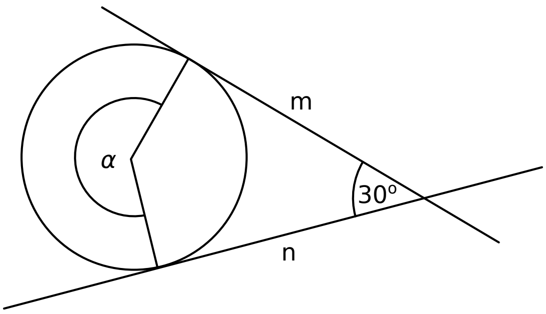
$$(2\sqrt{3})^2=12,\ (3\sqrt{2})^2=18,\ (\sqrt{3})^2=3$$

i $12+3<18$ z podanych odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt rozwartokątny.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Proste m i n są styczne do okręgu i przecinają się pod kątem 30°.

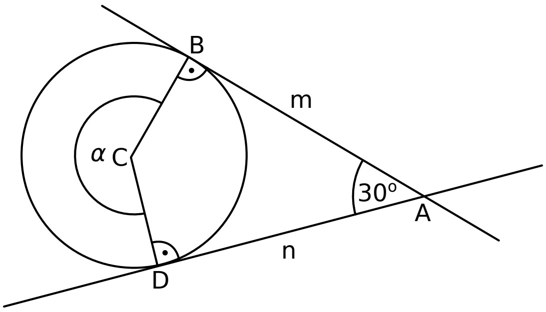


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miara kąta α jest równa

A) 210° B) 230° C) 240° D) 270°

ROZWIĄZANIE

Podpiszmy punkty zaznaczone na rysunku literkami.



Styczne do okręgu są prostopadłe do promieni łączących punkty styczności ze środkiem okręgu, więc

$$\measuredangle CBA = \measuredangle CDA = 90^\circ.$$

Suma kątów w czworokącie $ABCD$ jest równa 360°, więc

$$\measuredangle BCD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

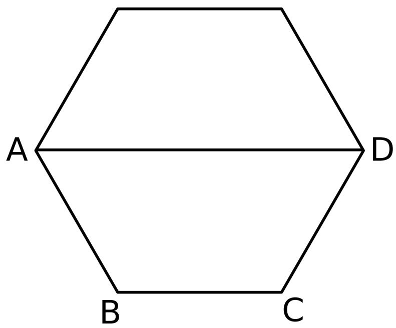
Zatem

$$\measuredangle\alpha = 360^\circ - \measuredangle BCD = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny o boku równym 2 cm. Przekątna AD dzieli go na dwa przystające trapezy równoramienne.

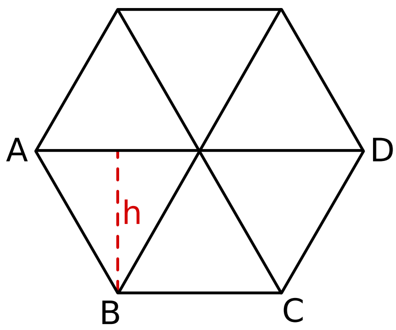


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Wysokość trapezu $ABCD$ jest równa

A) $\sqrt{2}$ cm B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm C) $\sqrt{3}$ cm D) 2 cm

ROZWIĄZANIE

Sześciokąt foremny składa się z 6 przystających trójkątów równobocznych.



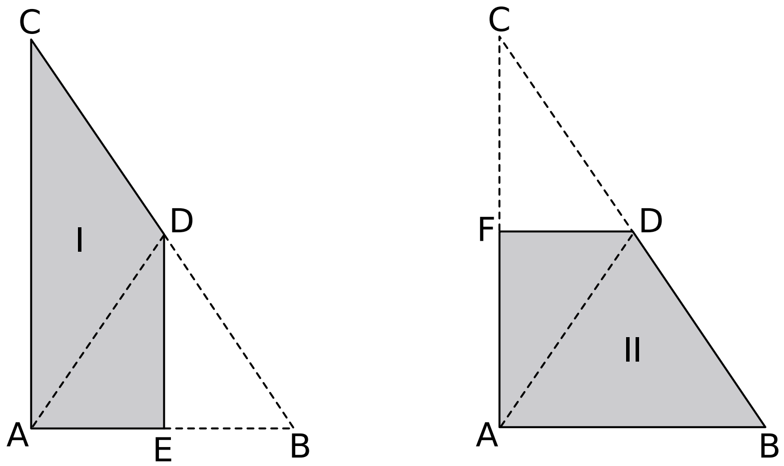
Zatem ze wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym mamy

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Ania wycięła z kartki papieru dwa jednakowe trójkąty prostokątne o bokach długości 12 cm, 16 cm i 20 cm. Pierwszy z nich zagięła wzdłuż symetralnej krótszej przyprostokątnej, a drugi – wzdłuż symetralnej dłuższej przyprostokątnej. W ten sposób otrzymała czworokąty pokazane na rysunkach.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Pole czworokąta I jest równe polu czworokąta II.	**P**	**F**
Obwód czworokąta I jest mniejszy od obwodu czworokąta II.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że pierwszym wypadku zagięty (biały) trójkąt ma pole równe

$$\frac{1}{2}\cdot EB\cdot ED=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24,$$

a w drugim przypadku to pole jest równe

$$\frac{1}{2}\cdot FD\cdot FC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24.$$

To oznacza, że pola otrzymanych czworokątów są takie same (bo w obu przypadkach startujemy od tego samego trójkąta ABC). Obwody czworokątów są odpowiednio równe

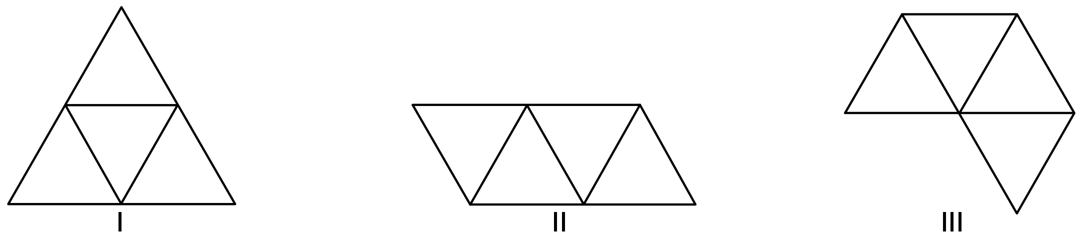
$$\begin{aligned}\text{I: } & AC+CD+DE+EA=16+10+8+6=40\\ \text{II: } & AF+FD+DB+AB=8+6+10+12=36.\end{aligned}$$

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Rysunki przedstawiają bryłę, której wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi.

Które wielokąty – I, II, III – przedstawiają siatki bryły takiej, jaką pokazano na powyższych rysunkach? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



A) I, II i III B) tylko I i III C) tylko II i III D) tylko I i II

ROZWIĄZANIE

Rysunek III nie może przedstawiać siatki czworościanu, bo w środkowym wierzchołku spotykają się 4 ściany. Pozostałe rysunki przedstawiają prawidłowe siatki czworościanu foremnego.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Szklane naczynie w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 6 cm, 15 cm i 18 cm napełniono częściowo wodą i szczelnie zamknięto. Następnie naczynie postawiono na jego ścianie o największej powierzchni i wtedy woda sięgała do wysokości 4 cm.

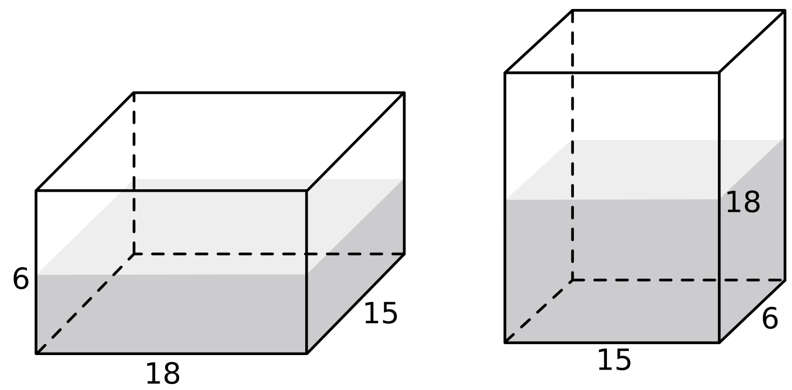
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kiedy naczynie postawiono na ścianie o najmniejszej powierzchni, to woda sięgała do wysokości

A) 8 cm B) 10 cm C) 12 cm D) 16 cm

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy prostopadłościan.



Zauważmy, że największa ściana prostopadłościanu ma wymiary: 15 cm i 18 cm, więc wody w naczyniu jest

$$15 \cdot 18 \cdot 4 \text{ cm}^3.$$

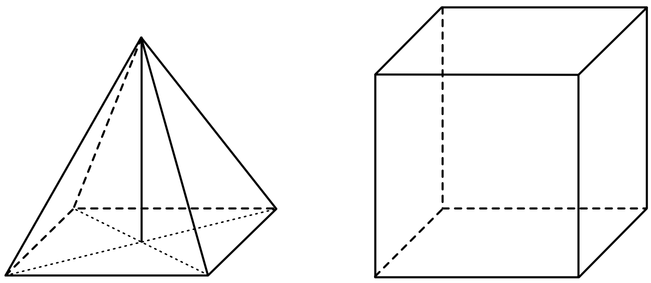
Jeżeli teraz postawimy naczynie na ścianie o najmniejszym polu powierzchni, czyli na ścianie o wymiarach 6 cm i 15 cm, oraz przez x oznaczymy wysokość wody w tym ustawieniu naczynia, to mamy

$$6 \cdot 15 \cdot x = 15 \cdot 18 \cdot 4 \quad / : 6 \cdot 15$$
$$x = 3 \cdot 4 = 12.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny i sześcian. Bryły mają jednakowe podstawy i równe wysokości, a suma objętości tych brył jest równa 36 cm^3.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Objętość sześcianu jest trzy razy większa od objętości ostrosłupa.	**P**	**F**
Krawędź sześcianu ma długość 3 cm.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez a długość krawędzi sześcianu. Objętości sześcianu i ostrosłupa są odpowiednio równe

$$V_s = a^3$$
$$V_o = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}V_s.$$

Za podanej sumy objętości mamy ponadto

$$36 = V_s + V_o = a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3 \quad / \cdot \frac{3}{4}$$
$$27 = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 21 (3 PKT)

Maja, Ola i Jagna kupowały zeszyty. Maja za 3 grube zeszyty i 8 cienkich zapłaciła 10 zł. Ola kupiła 4 grube oraz 4 cienkie zeszyty i również zapłaciła 10 zł. Czy Jagnie wystarczy 10 złotych na zakup 5 grubych zeszytów i 1 cienkiego? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez x cenę grubego zeszytu, a przez y cenę cienkiego zeszytu, to z podanych informacji otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ 4x + 4y = 10. \end{cases}$$

Podstawiamy $4y = 10 - 4x$ z drugiego równania do pierwszego i mamy

$$3x + 2(10 - 4x) = 10$$
$$3x + 20 - 8x = 10$$
$$10 = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Mamy stąd

$$4y = 10 - 4x = 10 - 8 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 0,5.$$

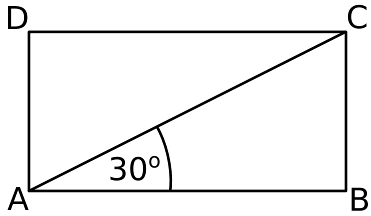
W takim razie 5 grubych i 1 cienki zeszyt będą kosztować

$$5x + y = 10 + 0,5 = 10,5 \text{ zł}.$$

Odpowiedź: **Nie, Jagnie nie wystarczy pieniędzy.**

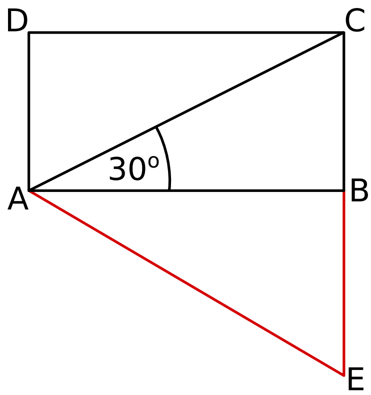
ZADANIE 22 (2 PKT)

Przekątna prostokąta $ABCD$ nachylona jest do jednego z jego boków pod kątem 30°. Uzasadnij, że pole prostokąta $ABCD$ jest równe polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta.



ROZWIĄZANIE

Trójkąt prostokątny ABC jest połówką trójkąta równobocznego AEC o boku równym przekątnej prostokąta, więc jego pole jest równe połowie pola trójkąta AEC.

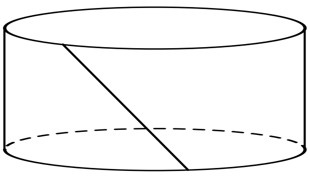


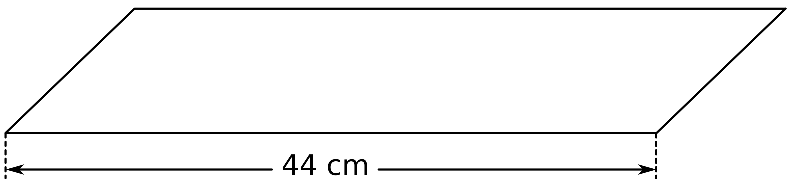
W takim razie

$$P_{ABCD} = 2P_{ABC} = P_{AEC}.$$

ZADANIE 23 (4 PKT)

Po rozklejeniu ściany bocznej pudełka mającego kształt walca otrzymano równoległobok. Jeden z boków tej figury ma długość 44 cm, a jej pole jest równe 220 cm^2. Oblicz objętość tego pudełka. Przyjmij przybliżenie π równe $\frac{22}{7}$. Zapisz obliczenia.





Rozwiązanie

Oznaczmy promień podstawy walca przez r, a jego wysokość przez H. Długość dłuższego boku równoległoboku to dokładnie długość okręgu w podstawie walca, czyli

$$2\pi r = 44 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{44}{2\pi} = \frac{22}{\pi}.$$

Wysokość walca jest równa wysokości równoległobku, więc możemy ją obliczyć z podanego pola równoległoboku.

$$44 \cdot H = 220 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{220}{44} = \frac{20}{4} = 5.$$

Objętość walca jest więc równa

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot \frac{22^2}{\pi^2} \cdot 5 = 22^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 5 \approx 22^2 \cdot \frac{7}{22} \cdot 5 = 22 \cdot 35 = 770.$$

Odpowiedź: 770 $\mathbf{cm}^3$