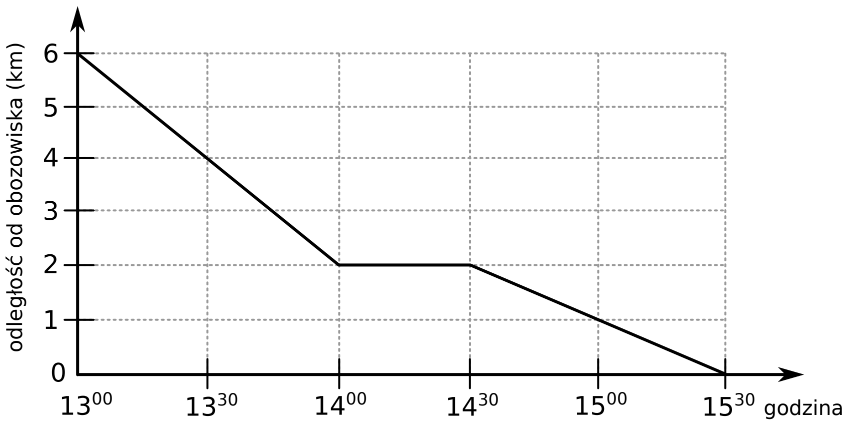
# EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

19 KWIETNIA 2016

CZAS PRACY: 90 MINUT

## ZADANIE 1 (1 PKT)

Zastęp harcerzy wyruszył z przystanku autobusowego do obozowiska. Na wykresie przedstawiono zależność między odległością harcerzy od obozowiska a czasem wędrówki.




**Które z poniższych zdań jest fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
A) Harcerze dotarli do obozowiska po 2,5 godziny.
B) W ciągu pierwszej godziny harcerze przeszli 2 km.
C) Podczas wędrówki harcerze zatrzymali się na 30-minutowy postój.
D) O godzinie 14:15 harcerze byli w odległości 2 km od obozowiska.

## ROZWIĄZANIE

Z wykresu odczytujemy, że
Harcerze całą trasę przebyli w ciągu 2,5 godziny (wyruszyli o 13:00, a do obozowiska dotarli o 15:30).
Do godziny 14:00 harcerze przeszli $6-2=4$ kilometry.
Pomiędzy godziną 14:00, a 14:30 harcerze mieli postój.
W trakcie postoju, a więc pomiędzy 14:00, a 14:30 harcerze byli w odległości 2 km od obozowiska.

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 2 (1 PKT)

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Odległość między punktami, które na osi liczbowej odpowiadają liczbom $-2,3$ i $\frac{1}{3}$ jest równa

A) $-2,3-\frac{1}{3}$ B) $2,3-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}-2,3$ D) $\frac{1}{3}+2,3$

## ROZWIĄZANIE

Większą z liczb jest $\frac{1}{3}$, a mniejszą $-2,3$. Odległość między tymi liczbami jest więc równa

$$\frac{1}{3} - (-2,3) = \frac{1}{3} + 2,3.$$

---

**Odpowiedź: D**

## ZADANIE 3 (1 PKT)

Z cyfr 2, 3 i 5 Ania utworzyła wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
**Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
A) Wszystkie liczby utworzone przez Anię są nieparzyste.
B) Wszystkie liczby utworzone przez Anię są mniejsze od 530.
C) Dwie liczby utworzone przez Anię są podzielne przez 5.
D) Wśród liczb utworzonych przez Anię są liczby podzielne przez 3.

## ROZWIĄZANIE

Jedną z utworzonych liczb jest np. 352, więc są wśród tych liczb liczby parzyste.
Z podanych cyfr można utworzyć 532, a więc liczbę większą od 530.
Jeżeli utworzona liczba ma dzielić się przez 5, to na końcu musi mieć 5-tkę, czyli jest to 235 lub 325.
Suma cyfr w każdej z utworzonych liczb jest równa $2+3+5=10$, więc żadna z tych liczb nie dzieli się przez 3.

---

**Odpowiedź: C**



## ZADANIE 4 (1 PKT)

Dane są liczby

I. $25^{41}$ II. $125^{41}$ III. $2^{862}$ IV. $5^{431}$

**Która z tych liczb jest największa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
A) I B) II C) III D) IV

### ROZWIĄZANIE

Oczywiście
$$125^{41} > 25^{41}.$$
Ponadto
$$125^{41} = \left(5^3\right)^{41} = 5^{3\cdot 41} = 5^{123} < 5^{431}$$
oraz
$$2^{862} = \left(2^2\right)^{431} = 4^{431} < 5^{431}.$$

---

Odpowiedź: **D**

## ZADANIE 5 (1 PKT)

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Liczba $\sqrt[3]{81 \cdot 64}$ jest równa

A) 72 B) 36 C) $24\sqrt[3]{3}$ D) $12\sqrt[3]{3}$

### ROZWIĄZANIE

Liczymy
$$\sqrt[3]{81 \cdot 64} = \sqrt[3]{27 \cdot 3 \cdot 4^3} = \sqrt[3]{27} \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{3} = 12\sqrt[3]{3}.$$

---

Odpowiedź: **D**

## ZADANIE 6 (1 PKT)

W tabeli podano, w jaki sposób zmienia się cena biletu na prom w ciągu całego roku.

| | |
|---|---|
| Cena podstawowa biletu na prom | 40 zł |
| Cena biletu w sezonie zimowym | cena podstawowa obniżona o 20% |
| Cena biletu w sezonie letnim | cena podstawowa podwyższona o 200% |
| Cena biletu poza sezonem zimowym i letnim | cena podstawowa |

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Bilet na prom w sezonie letnim jest droższy od biletu w sezonie zimowym o

A) 88 zł B) 72 zł C) 48 zł D) 32 zł

### ROZWIĄZANIE

W sezonie letnim bilet kosztuje

$$40 + 40 \cdot 200\% = 40 + 40 \cdot 2 = 40 + 80 = 120 \text{ zł},$$

a w sezonie zimowym cena biletu jest równa

$$40 - 40 \cdot \frac{1}{5} = 40 - 8 = 32 \text{ zł}.$$

Cena w sezonie letnim jest więc wyższa o

$$120 - 32 = 88 \text{ zł}.$$

---

Odpowiedź: **A**

### ZADANIE 7 (1 PKT)

Dane są liczby $a$ i $b$ takie, że $2 < a < 3$ oraz $-1 < b < 1$.
**Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

| | | |
|---|---|---|
| Iloraz $\frac{b}{a}$ jest zawsze dodatni. | **P** | **F** |
| Różnica $b - a$ jest zawsze dodatnia. | **P** | **F** |

### ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że liczby $a = 2,5$ i $b = -0,5$ spełniają dane warunki, więc iloraz $\frac{b}{a}$ nie musi być dodatni. Ponadto

$$b < 1 < 2 < a,$$

więc różnica $b - a$ jest zawsze ujemna.

---

Odpowiedź: **F, F**

### ZADANIE 8 (1 PKT)

W klasie IIIa liczba dziewcząt stanowi $\frac{2}{3}$ liczby wszystkich uczniów tej klasy.
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
W klasie IIIa
A) jest więcej chłopców niż dziewcząt.
B) liczba dziewcząt stanowi $\frac{3}{2}$ liczby chłopców.
C) jest dwa razy więcej dziewcząt niż chłopców.
D) stosunek liczby chłopców do liczby dziewcząt jest równy 1:3.

### ROZWIĄZANIE

Jeżeli dziewczęta stanowią $\frac{2}{3}$ liczby wszystkich uczniów, to chłopcy stanowią $\frac{1}{3}$ wszystkich uczniów. W szczególności chłopców jest mniej niż dziewcząt, a dokładniej dziewcząt jest dwa razy więcej niż chłopców.

---

Odpowiedź: **C**

### ZADANIE 9 (1 PKT)

Cenę roweru obniżono o 8%. Klient kupił rower po obniżonej cenie i dzięki temu zapłacił o 120 zł mniej, niż zapłaciłby przed obniżką.
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Przed obniżką ten rower kosztował

A) 2000 zł B) 1500 zł C) 1380 zł D) 960 zł

### ROZWIĄZANIE

Niech $x$ oznacza cenę roweru przed obniżką. Mamy zatem

$$120 = 8\%x = \frac{8}{100}x = \frac{2}{25}x \quad / \cdot \frac{25}{2}$$
$$x = 120 \cdot \frac{25}{2} = 60 \cdot 25 = 1500 \text{ zł}.$$

---

Odpowiedź: **B**

### ZADANIE 10 (1 PKT)

W pewnym zakładzie każdy z pracowników codziennie maluje taką samą liczbę jednakowych ozdób. Pracownicy potrzebowali 12 dni roboczych, aby wykonać zamówienie. Gdyby było ich o dwóch więcej, to czas wykonania tego zamówienia byłby o 3 dni krótszy.
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Liczbę pracowników $x$ tego zakładu można obliczyć, rozwiązując równanie

A) $12x = 9(x-3)$ B) $12x = 9(x+2)$ C) $12(x-3) = 9x$ D) $12(x+2) = 9x$

### ROZWIĄZANIE

Z jednej strony wiemy, że wykonanie wszystkich ozdób zajęło $x$ pracownikom 12 dni, a drugiej strony wiemy, że gdyby pracowników było $x+2$, to ozdoby wykonano by w 9 dni. Mamy stąd równanie

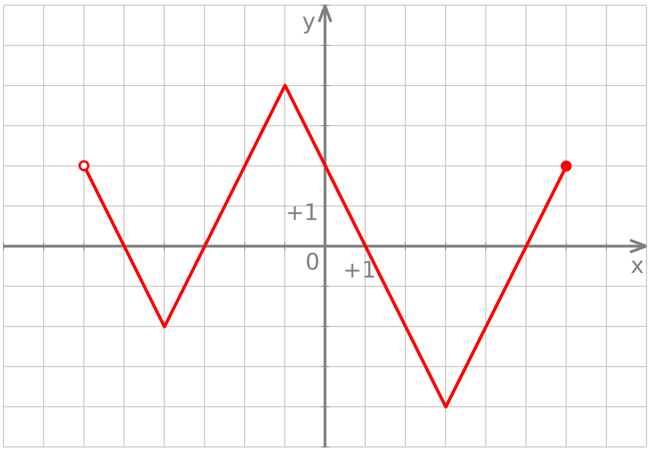
$$12x = 9(x+2).$$

---

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 11 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.




**Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

| | | |
|---|---|---|
| Funkcja przyjmuje wartość największą dla argumentu 4. | **P** | **F** |
| Funkcja przyjmuje wartość 0 dla czterech argumentów. | **P** | **F** |

## ROZWIĄZANIE

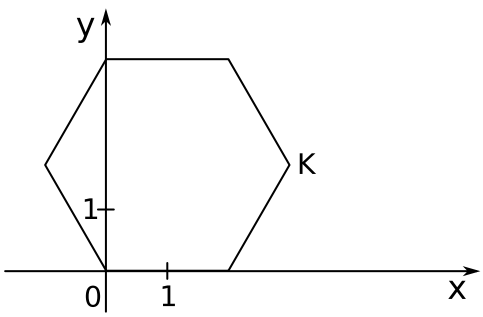
Funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje największą wartość w punkcie $x = -1$.

Z wykresu widać też, że wartość 0 funkcja przyjmuje dla $x \in \{-5, -3, 1, 5\}$.

Odpowiedź: **F, P**

## ZADANIE 12 (1 PKT)

W układzie współrzędnych narysowano sześciokąt foremny o boku 2 tak, że jednym z jego wierzchołków jest punkt $(0, 0)$, a jeden z jego boków leży na osi $x$ (rysunek).

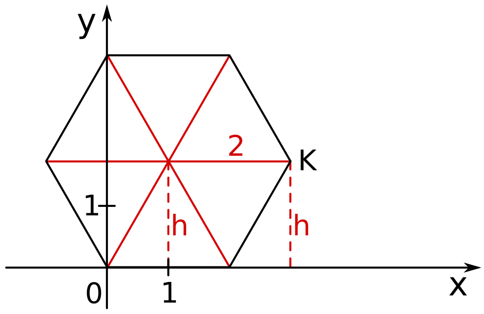



**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Współrzędne wierzchołka K tego sześciokąta są równe

A) $\left(3, \sqrt{3}\right)$ B) $\left(\sqrt{3}, 3\right)$ C) $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D) $\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

## ROZWIĄZANIE

Jeżeli połączymy wierzchołki sześciokąta foremnego z jego środkiem, to otrzymamy 6 trójkątów równobocznych.




Z rysunku powinno być jasne, że pierwsza współrzędna punktu $K$ jest równa 3, a druga jest równa wysokości trójkąta równobocznego o boku 2, czyli jest równa

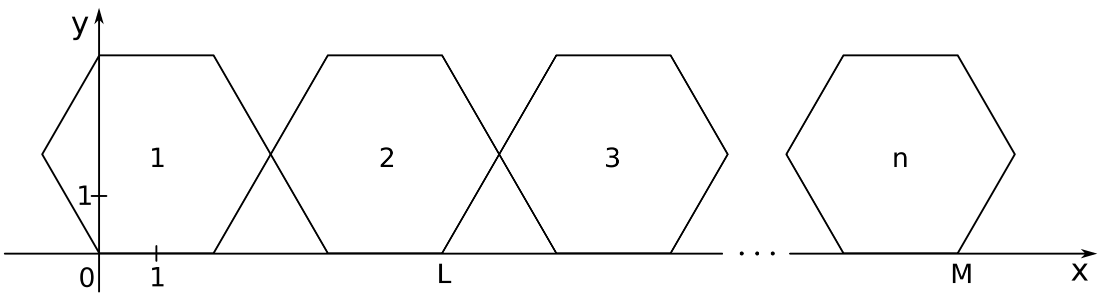
$$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

---

Odpowiedź: **A**

## ZADANIE 13 (1 PKT)

W układzie współrzędnych narysowano sześciokąt foremny o boku 2 tak, że jednym z jego wierzchołków jest punkt $(0,0)$, a jeden z jego boków leży na osi $x$. Do tego sześciokąta dorysowujemy kolejne takie same sześciokąty. Umieszczamy je tak, jak na rysunku, aby każdy następny sześciokąt miał z poprzednim dokładnie jeden wspólny wierzchołek oraz by jeden bok każdego sześciokąta leżał na osi $x$. Poniżej przedstawiono dorysowane, zgodnie z tą regułą, sześciokąty, które ponumerowano kolejnymi liczbami naturalnymi.

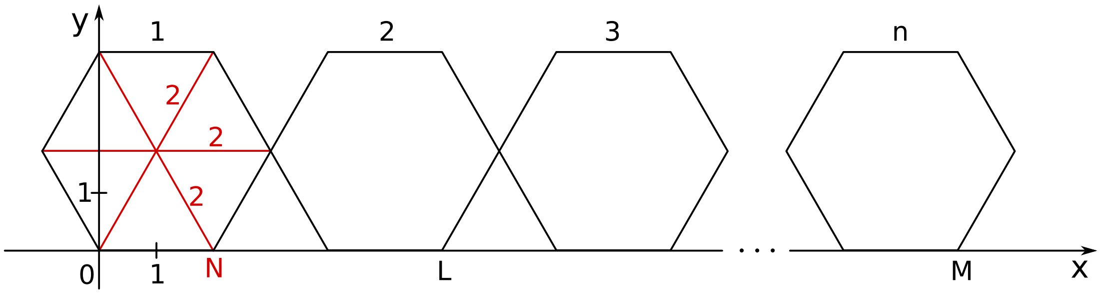



**Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

| | | |
|---|---|---|
| Pierwsza współrzędna wierzchołka $L$ w drugim sześciokącie jest równa 6. | **P** | **F** |
| Pierwsza współrzędna wierzchołka $M$ w $n$–tym sześciokącie jest równa $4n-2$. | **P** | **F** |

## ROZWIĄZANIE

Jeżeli połączymy wierzchołki sześciokąta foremnego z jego środkiem, to otrzymujemy 6 trójkątów równobocznych.




W takim razie szerokość każdego z sześciokątów jest równa $2+2=4$, a wierzchołek $N$ na rysunku ma współrzędne $(2,0)$. Wierzchołek $L$ otrzymujemy przesuwając $N$ o szerokość sześciokąta, więc $L=(6,0)$.

Dokładnie w ten sposób wyznaczamy współrzędne wierzchołka $M$ – aby otrzymać ten punkt musimy przesunąć $N$ o $(n-1)$ szerokości sześciokąta. Stąd

$$M=(2+4(n-1),0)=(4n-2,0).$$

---

Odpowiedź: **P, P**

## ZADANIE 14 (1 PKT)

Kasia ma 6 lat. Średnia arytmetyczna wieku Ani i Pawła jest równa 12 lat.
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Średnia arytmetyczna wieku Kasi, Ani i Pawła jest równa
A) 6 lat B) 9 lat C) 10 lat D) 15 lat

## ROZWIĄZANIE

Skoro średnia arytmetyczna wieku Ani i Pawła jest równa 12 lat, to w sumie mają 24 lata. To oznacza, że średnia wieku Kasi, Ani i Pawła jest równa

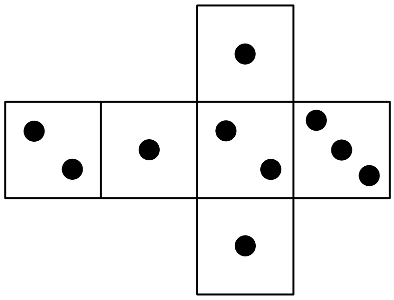
$$\frac{6+24}{3}=10 \text{ lat.}$$

---

Odpowiedź: **C**

## ZADANIE 15 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono siatkę nietypowej sześciennej kostki do gry. Rzucamy jeden raz taką kostką.



**Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

| | | |
|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek jest 2 razy większe niż prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek. | **P** | **F** |
| Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek mniejszej od 3 jest równe $\frac{5}{6}$. | **P** | **F** |

ROZWIĄZANIE

Na trzech ścianach kostki jest jedno oczko, więc prawdopodobieństwo wyrzucenia jednego oczka jest równe $\frac{3}{6}$. Prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch oczek jest równe $\frac{2}{6}$, a prawdopodobieństwo wyrzucenia 3 oczek jest równe $\frac{1}{6}$. W szczególności prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek jest równe $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ i jest dwa razy większe od prawdopodobieństwa wyrzucenia 2 oczek.

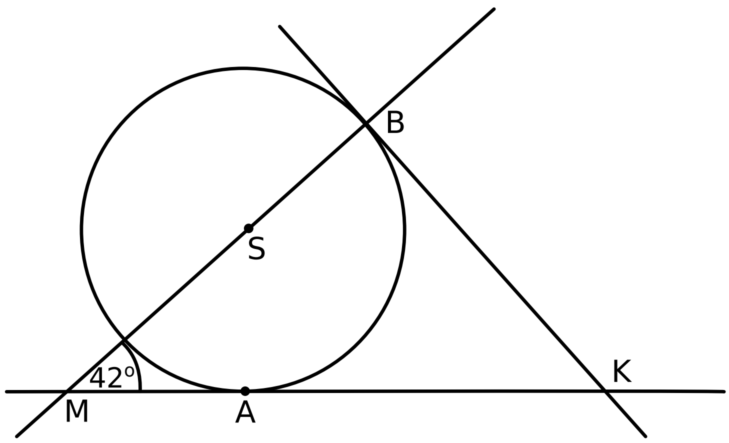
Prawdopodobieństwo wyrzucenia 1 lub 2 oczek jest równe $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

---

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Proste $KA$ i $KB$ są styczne do okręgu o środku $S$ w punktach $A$ i $B$, a kąt $BMA$ ma miarę $42^\circ$ (rysunek).




**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Kąt $AKB$ jest równy

A) $58^\circ$ B) $52^\circ$ C) $48^\circ$ D) $42^\circ$

## ROZWIĄZANIE

Ponieważ styczna $KB$ jest prostopadła do promienia $SB$, to trójkąt $AKB$ jest prostokątny. Zatem

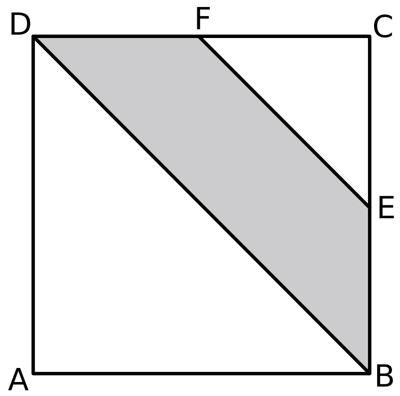
$$\measuredangle AKB = 90^\circ - \measuredangle BMA = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

---

**Odpowiedź: C**

## ZADANIE 17 (1 PKT)

Punkty $E$ i $F$ są środkami boków $BC$ i $CD$ kwadratu $ABCD$ (rysunek).




**Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

| | | |
|---|---|---|
| Pole trójkąta $FEC$ stanowi $\frac{1}{8}$ pola kwadratu $ABCD$. | **P** | **F** |
| Pole czworokąta $DBEF$ stanowi $\frac{3}{8}$ pola kwadratu $ABCD$. | **P** | **F** |

## ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąt $FEC$ jest dwa razy mniejszy od trójkąta $DBC$, więc

$$P_{FEC} = \frac{1}{4}P_{DBC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{8}P_{ABCD}.$$

Ponadto

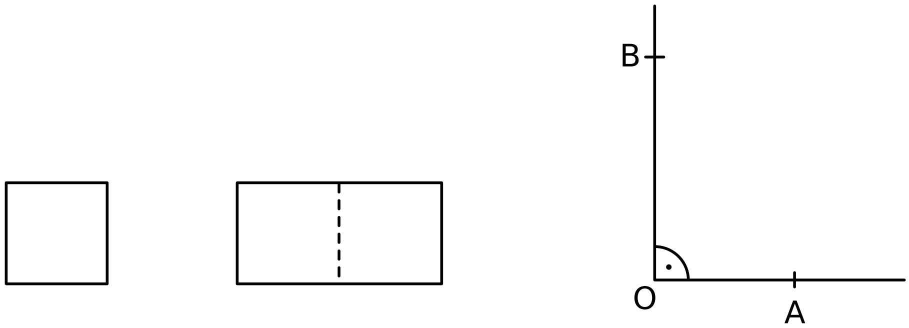
$$P_{DBEF} = P_{DBC} - P_{FEC} = \frac{1}{2}P_{ABCD} - \frac{1}{8}P_{ABCD} = \frac{3}{8}P_{ABCD}.$$

---

**Odpowiedź: P, P**

## ZADANIE 18 (1 PKT)

Ewa narysowała kwadrat o boku 1, prostokąt o bokach 2 i 1 oraz kąt prosty o wierzchołku $O$.




Następnie od wierzchołka $O$ kąta prostego odmierzyła na jednym ramieniu kąta odcinek $OA$ o długości równej przekątnej kwadratu, a na drugim ramieniu – odcinek $OB$ o długości równej przekątnej prostokąta.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Długość odcinka $AB$ jest równa

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

### ROZWIĄZANIE

Przekątna kwadratu o boku długości 1 ma długość $\sqrt{2}$, a przekątna narysowanego prostokąta ma długość $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Zatem $OA=\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{5}$ i

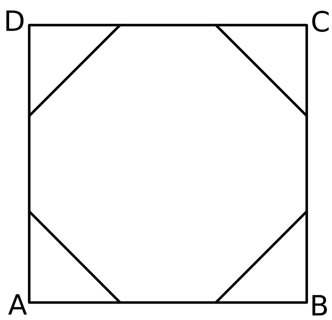
$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2+5}=\sqrt{7}.$$

---

Odpowiedź: **A**

## ZADANIE 19 (1 PKT)

Każdy bok kwadratu $ABCD$ podzielono na 3 równe części i połączono kolejno punkty podziału, w wyniku czego otrzymano ośmiokąt (rysunek).




**Które z poniższych zdań jest prawdziwe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) Ośmiokąt jest foremny.
B) Wszystkie boki ośmiokąta mają taką samą długość.
C) Każdy kąt wewnętrzny ośmiokąta ma miarę 135°.
D) Obwód ośmiokąta jest większy od obwodu kwadratu $ABCD$.

## ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że naroża dopełniające ośmiokąt do kwadratu są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi, więc ich kąty ostre mają miarę $45^\circ$. To oznacza, że każdy z kątów utworzonego ośmiokąta ma miarę

$$180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

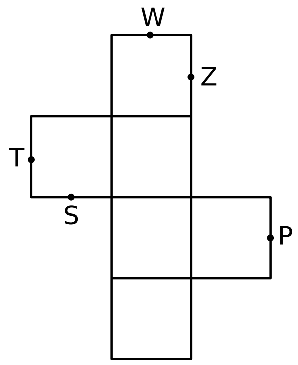
Pozostałe zdania są nieprawdziwe.

---

Odpowiedź: **C**

## ZADANIE 20 (1 PKT)

Na rysunku poniżej przedstawiono siatkę sześcianu. Punkty: $P, S, T, W, Z$ są środkami jego krawędzi.

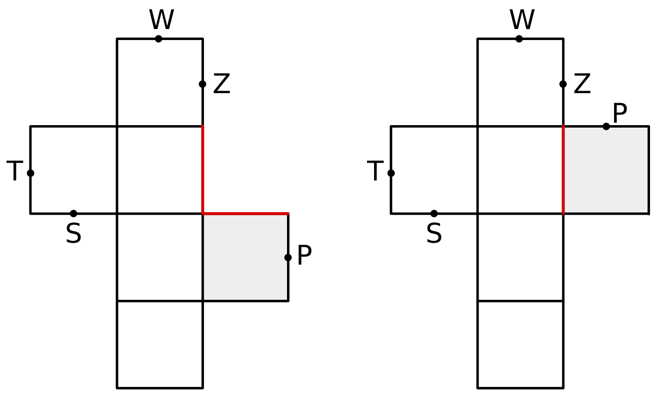



**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Po złożeniu sześcianu z tej siatki punkt $P$ pokryje się z punktem

A) $W$ B) $Z$ C) $T$ D) $S$

## ROZWIĄZANIE

Zmieńmy siatkę sześcianu tak, jak na rysunku poniżej (zmieniamy położenie zacienionej ściany).




Powinno teraz być jasne, że po złożeniu sześcianu punkt $P$ pokryje się punktem $Z$.

---

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 21 (2 PKT)

Jedenaście piłeczek, ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 11, wrzucono do pudełka. Janek, nie patrząc na piłeczki, wyjmuje je z pudełka. Ile najmniej piłeczek musi wyjąć Janek, aby mieć pewność, że przynajmniej jedna wyjęta piłeczka jest oznaczona liczbą parzystą? Odpowiedź uzasadnij.

### ROZWIĄZANIE

Jeżeli Janek wyciągnie 6 piłek, to może się zdarzyć, że będą to piłki oznaczone liczbami

$$1,3,5,7,9,11.$$

Jeżeli jednak wyciągnie 7 piłek, to jedna z nich będzie już musiała być oznaczona liczbą parzystą.

Odpowiedź: **7**

## ZADANIE 22 (3 PKT)

Uczniowie klas trzecich pewnego gimnazjum pojechali na wycieczkę pociągiem. W każdym zajętym przez nich przedziale było ośmioro uczniów. Jeśli w każdym przedziale byłoby sześcioro uczniów, to zajęliby oni o 3 przedziały więcej. Ilu uczniów pojechało na tę wycieczkę? Zapisz obliczenia.

### ROZWIĄZANIE

#### Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez $n$ liczbę uczniów, którzy pojechali na wycieczkę, to wiemy, że zmieścili się oni w $\frac{n}{8}$ przedziałach. Wiemy ponadto, że gdyby zwiększyć liczbę przedziałów o 3, to w każdym przedziale moglibyśmy umieścić 6 uczniów, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{n}{8}+3=\frac{n}{6} \quad / \cdot 24$$

$$3n+72=4n \quad \Rightarrow \quad n=72.$$

#### Sposób II

Jeżeli oznaczymy przez $n$ liczbę uczniów, a przez $p$ liczbę zajętych przez nich przedziałów, to wiemy, że

$$\begin{cases} n=8p \\ n=6(p+3). \end{cases}$$

Mamy stąd

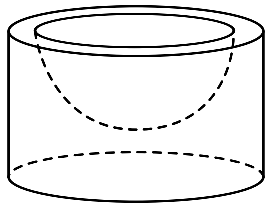
$$8p=6p+18 \quad \Rightarrow \quad 2p=18 \quad \Rightarrow \quad p=9.$$

Zatem $n=8p=72$.

Odpowiedź: **72**

## ZADANIE 23 (3 PKT)

Pojemnik z kremem ma kształt walca o promieniu podstawy 4 cm i wysokości 4,5 cm. Po jego otwarciu okazało się, że krem wypełnia tylko wyżłobioną w pojemniku półkulę o promieniu 3 cm. Ile razy objętość tej półkuli jest mniejsza od objętości walca? Zapisz obliczenia.



## ROZWIĄZANIE

Objętość walca promieniu podstawy $R = 4$ i wysokości $H = 4,5$ jest równa

$$\pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 16 \cdot 4,5 = 72\pi,$$

a objętość połówki kuli o promieniu $r = 3$ jest równa

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 27 = 18\pi.$$

Objętość półkuli stanowi więc

$$\frac{18\pi}{72\pi} = \frac{1}{4}$$

objętości walca.

Odpowiedź: **Objętość półkuli jest 4 razy mniejsza.**