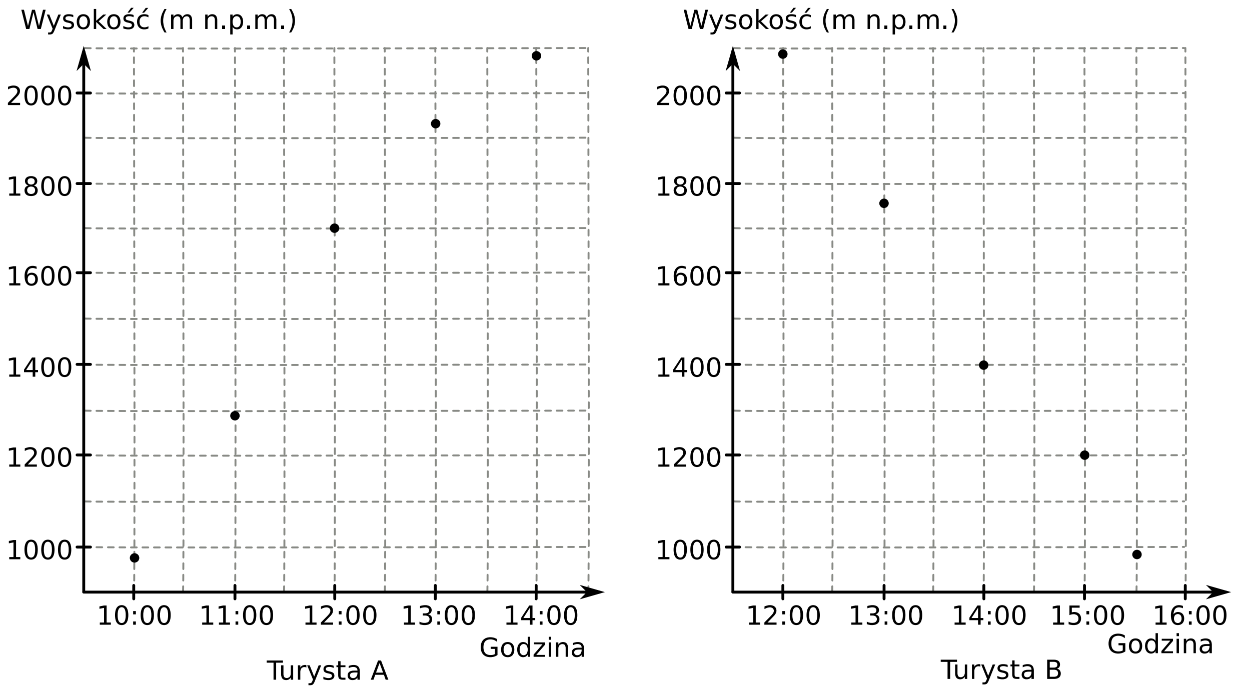
EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

20 KWIETNIA 2017

CZAS PRACY: 90 MINUT

ZADANIE 1 (1 PKT)

Turysta A szedł ze schroniska w kierunku szczytu, natomiast turysta B schodził ze szczytu w kierunku schroniska. Obaj szli tym samym szlakiem i tego samego dnia. Wykresy przedstawiają, na jakiej wysokości względem poziomu morza znajdowali się turyści w określonym czasie.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Turyści spotkali się na szlaku między godziną 13:00 a 14:00.	**P**	**F**
Turyści spotkali się w miejscu położonym między 1700 a 2000 m n.p.m.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

W wykresu odczytujemy, że po 13:00 turysta A znajdował się już powyżej 1900 m, a turysta B zszedł już poniżej 1800 m.

Turysta A był na wysokości 1700 m o godz. 12:00. W tym samym momencie turysta B rozpoczynał schodzenie ze schroniska, więc na pewno spotkali się powyżej wysokości 1700 m. Z drugiej strony, o godz. 13:00 turysta A był wciąż poniżej 2000 m, a turysta B zszedł już poniżej 1800 m, więc spotkanie musiało nastąpić poniżej wysokości 2000 m.

Odpowiedź: **F, P**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Paweł przejechał na rowerze trasę długości 700 m w czasie 2 min.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prędkość średnia, jaką uzyskał Paweł na tej trasie, jest równa

A) $10,5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B) $14\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C) $21\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D) $35\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Średnia prędkość Pawła jest równa

$$\frac{700\ \text{m}}{2\ \text{min.}} = \frac{\frac{7}{10}\ \text{km}}{\frac{1}{30}\ \text{h}} = \frac{7\cdot 30}{5}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 21\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Sposób II

Skoro Paweł w 2 minuty przejechał 700 m, to w 60 minut przejechał

$$30\cdot 700\ \text{m} = 21000\ \text{m} = 21\ \text{km}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dane są cztery wyrażenia:

$$\text{I. } \frac{3}{4}\cdot(-3) \qquad \text{II. } \frac{3}{4}:(-3) \qquad \text{III. } \frac{3}{4}+(-3) \qquad \text{IV. } -\frac{3}{4}-3$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Największą wartość ma wyrażenie

A) I B) II C) III D) IV

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{3}{4}\cdot(-3) = -\frac{9}{4}$$
$$\frac{3}{4}:(-3) = -\frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{4}+(-3) = \frac{3-12}{4} = -\frac{9}{4}$$
$$-\frac{3}{4}-3 = \frac{-3-12}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zaokrąglenie ułamka okresowego 9,2(6) z dokładnością do 0,001 jest równe
A) 9,262 B) 9,263 C) 9,266 D) 9,267

ROZWIĄZANIE

Zaokrągleniem danego ułamka jest liczba

$$9,26666\ldots \approx 9,267.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dana jest liczba dwucyfrowa. W tej liczbie cyfrą dziesiątek jest a, cyfrą jedności jest b oraz spełnione są warunki: $b > a$ i $a + b = 12$. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Warunki zadania spełnia siedem liczb.	**P**	**F**
Wszystkie liczby spełniające warunki zadania są podzielne przez 3.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Wypiszmy wszystkie liczby spełniające warunki zadania:

$$39,\ 48,\ 57.$$

Suma cyfr w każdej z tych liczb jest równa 12, więc każda z nich dzieli się przez 3.

Odpowiedź: **F, P**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba 7^{16} jest 7 razy większa od liczby 7^{15}.	**P**	**F**
$(-1)^{12} + (-1)^{13} + (-1)^{14} + (-1)^{15} + (-1)^{16} = 0$	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$7^{16} = 7 \cdot 7^{15}$$
$$(-1)^{12} + (-1)^{13} + (-1)^{14} + (-1)^{15} + (-1)^{16} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1.$$

Odpowiedź: P, F

ZADANIE 7 (1 PKT)

Dane są trzy wyrażenia:

$$\text{I. } (2\sqrt{3})^2 \qquad \text{II. } 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \qquad \text{III. } \frac{4\sqrt{18}}{\sqrt{2}}.$$

Wartości których wyrażeń są mniejsze od 15? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) Tylko I i II. B) Tylko I i III. C) Tylko II i III. D) I, II i III.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$$
$$2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2 \cdot 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = 8 \cdot 2 = 16$$
$$\frac{4\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{18}{2}} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 8 (1 PKT)

W pewnej szkole do egzaminu gimnazjalnego przystąpiło o 60 chłopców więcej niż dziewcząt. Chłopcy stanowili 65% liczby osób piszących egzamin. **Ile dziewcząt przystąpiło do tego egzaminu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) 200 B) 130 C) 70 D) 39

ROZWIĄZANIE

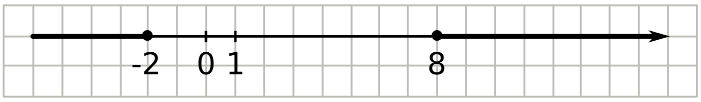
Jeżeli oznaczymy przez x liczbę dziewcząt, które przystąpiły do egzaminu, to chłopców do egzaminu przystąpiło $x + 60$. Wiemy ponadto, że stanowili oni 65% wszystkich osób zdających egzamin. Zatem

$$x + 60 = 65\%(x + x + 60) = 0,65(2x + 60) = 1,3(x + 30) = 1,3x + 39$$
$$21 = 0,3x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{21}{0,3} = \frac{7}{0,1} = 70.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 9 (1 PKT)

Dane są dwie liczby x i y. Wiadomo, że $x \geqslant 8$ oraz $y \leqslant -2$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Najmniejsza możliwa wartość różnicy $x - y$ jest równa:
A) 10 B) 6 C) -6 D) -10

ROZWIĄZANIE

Jeżeli $y \leqslant -2$, to $-y \geqslant 2$. Zatem

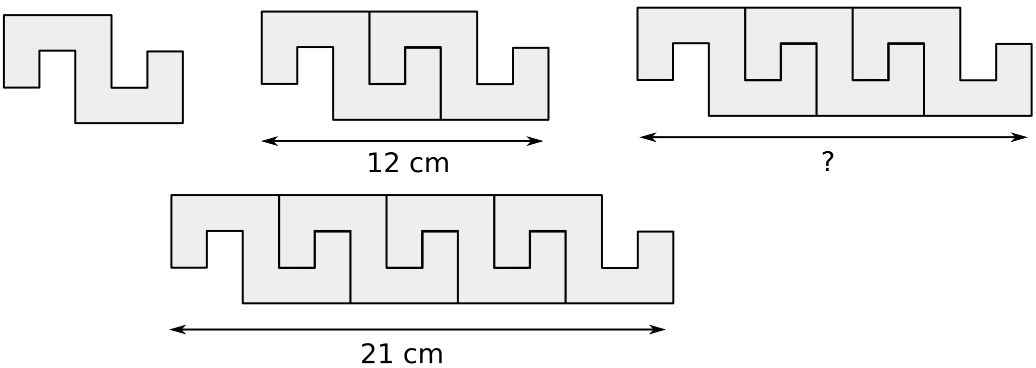
$$x - y \geqslant 8 + 2 = 10.$$

Taką wartość to wyrażenie przyjmuje dla $x = 8$ i $y = -2$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono sposób ułożenia wzoru z jednakowych elementów i podano długości dwóch fragmentów tego wzoru.

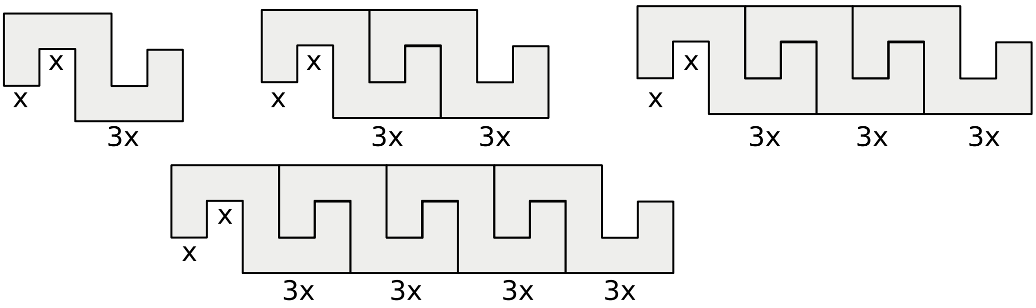


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Fragment wzoru złożony z 3 elementów ma długość
A) 15 cm B) 15,75 cm C) 16,5 cm D) 18 cm

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez x szerokość paska, z którego wykonany jest każdy z elementów, to jeden element ma szerokość $5x$, dwa elementy mają szerokość $2x + 3x + 3x = 8x$, trzy elementy mają szerokość $11x$, a cztery elementy mają szerokość $15x$.



Mamy zatem

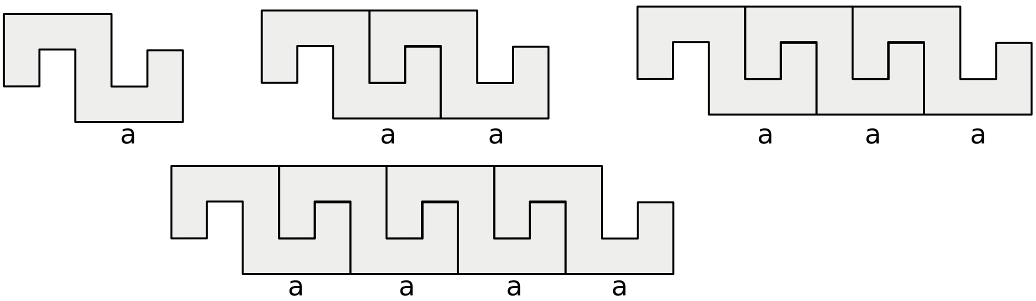
$$12 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Szerokość 3 elementów jest więc równa

$$11x = 11 \cdot 1,5 = 16,5$$

Sposób II

Zauważmy, że długość figury złożonej z 4 elementów jest dłuższa od figury złożonej z 2 elementów o dwie długości podstawy a jednej figury.



W takim razie

$$2a = 21 - 12 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 4,5.$$

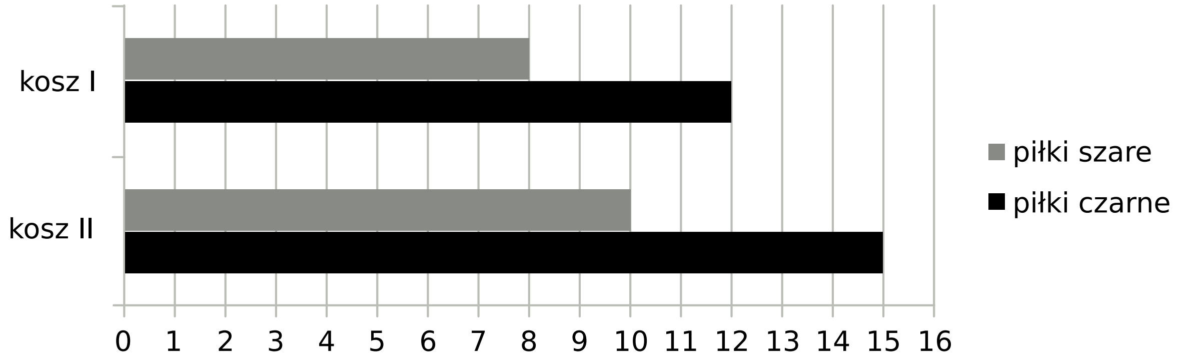
Teraz wystarczy zauważy, że szerokość figury złożonej z 3 elementów jest dłuższa od figury złożonej z 2 elementów o a, czyli jest równa

$$12 + 4,5 = 16,5.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Do dwóch koszy wrzucono piłki szare i czarne. Na diagramie przedstawiono liczbę piłek każdego koloru w I i w II koszu.



Czy wylosowanie piłki czarnej z kosza II jest bardziej prawdopodobne niż wylosowanie piłki czarnej z kosza I? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	N

	Uzasadnienie
A.	w koszu II jest więcej piłek czarnych niż w koszu I.
B.	stosunek liczby piłek czarnych do liczby wszystkich piłek jest taki sam w obu koszach.
C.	w koszu II jest o 3 piłki czarne więcej niż w koszu I, ale szarych – tylko o 2 więcej.

ROZWIĄZANIE

Prawdopodobieństwo wylosowania piłki czarnej z pierwszego koszta jest równe

$$\frac{12}{12+8} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

W przypadku drugiego kosza prawdopodobieństwo tego samego zdarzenia jest równe

$$\frac{15}{15+10} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Prawdopodobieństwa te są równe, bo stosunek liczby piłek czarnych do liczby wszystkich piłek jest taki sam w obu koszach.

Odpowiedź: **N i B**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Uczniowie mieli wyznaczyć zmienną r ze wzoru $F = G \cdot \frac{mM}{r^2}$. W tabeli przedstawiono rezultaty pracy kilkorga z nich.

Uczeń	Agata	Bartek	Czarek	Dorota
Rezultat	$r = \frac{GmM}{2F}$	$r = \sqrt{\frac{GmM}{F}}$	$r = \frac{mM}{2FG}$	$r = \sqrt{\frac{F}{GmM}}$

Kto z uczniów poprawnie wyznaczył zmienną r? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) Agata B) Bartek C) Czarek D) Dorota

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy dany wzór.

$$\begin{aligned} F &= G \cdot \frac{mM}{r^2} \quad / \cdot \frac{r^2}{F} \\ r^2 &= \frac{GmM}{F} \\ r &= \sqrt{\frac{GmM}{F}}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Sprzedawca kupił do swojego sklepu m kilogramów marchwi i b kilogramów buraków: zapłacił po 1,50 zł za kilogram marchwi i po 0,90 zł za kilogram buraków. Warzywa te sprzedał za łączną kwotę 180 złotych. **Które wyrażenie przedstawia różnicę kwoty uzyskanej za sprzedane warzywa i kosztu ich zakupu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) $m \cdot 1,5 + b \cdot 0,9 + 180$
B) $m \cdot 1,5 - b \cdot 0,9 - 180$
C) $180 - (m \cdot 1,5 + b \cdot 0,9)$
D) $180 - (m \cdot 1,5 - b \cdot 0,9)$

ROZWIĄZANIE

Sprzedawca za warzywa zapłacił

$$1,5m + 0,9b.$$

Zatem różnica kwoty uzyskanej za sprzedane warzywa i kosztu ich zakupu to

$$180 - (1,5m + 0,9b).$$

Odpowiedź: **C**

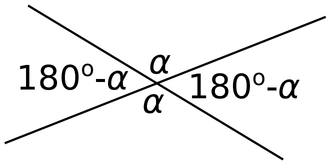
ZADANIE 14 (1 PKT)

Dwie przecinające się proste utworzyły cztery kąty. Suma miar trzech z tych kątów jest równa 225°. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Suma miar kątów ostrych wyznaczonych przez te proste jest równa 90°.	**P**	**F**
Jeden z dwóch kątów przyległych jest trzy razy większy od drugiego kąta.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy dwie przecinające się proste.



Dany warunek możemy zapisać w postaci

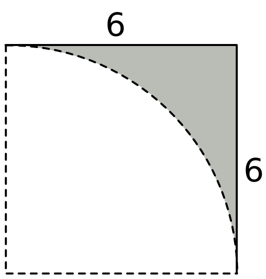
$$\begin{aligned}&\alpha + (180^\circ - \alpha) + \alpha = 225^\circ\\ &\alpha = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ\\ &180^\circ - \alpha = 135^\circ = 3\cdot 45^\circ.\end{aligned}$$

W takim razie rzeczywiście suma kątów ostrych wyznaczonych przez te proste jest równa $2\alpha = 90^\circ$ oraz jeden z kątów przyległych jest trzy razy większy od drugiego.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Z kartki w kształcie kwadratu o boku 6 odcięto ćwierć koła o promieniu 6 (patrz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Pole powierzchni pozostałej zacieniowanej części kartki jest równe

A) $144 - 12\pi$ B) $144 - 36\pi$ C) $36 - 3\pi$ D) $36 - 9\pi$

ROZWIĄZANIE

Pole kwadratu o boku 6 jest równe 36, a pole ćwiartki koła o promieniu 6 wynosi

$$\frac{1}{4} \cdot \pi 6^2 = 9\pi.$$

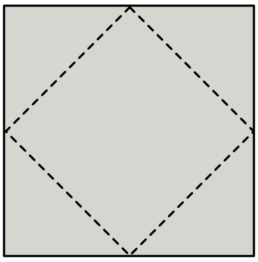
Zacieniowana figura ma więc pole

$$36 - 9\pi.$$

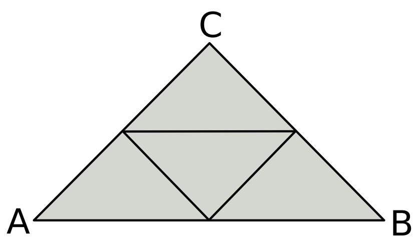
Odpowiedź: D

ZADANIE 16 (1 PKT)

Z kwadratu odcięto trójkąty tak, że linie cięcia przeprowadzono przez środki boków tego kwadratu (rysunek I). Z odciętych trójkątów ułożono trójkąt ABC (rysunek II).



Rysunek I



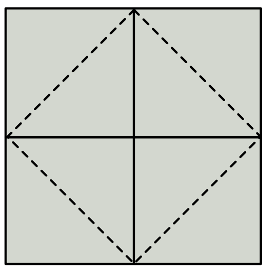
Rysunek II

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny.	**P**	**F**
Pole trójkąta ABC jest połową pola kwadratu.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Ponieważ wszystkie odcięte trójkąty są przystające, oraz każdy z nich jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, to utworzony trójkąt ABC jest prostokątny oraz $AC = BC$.

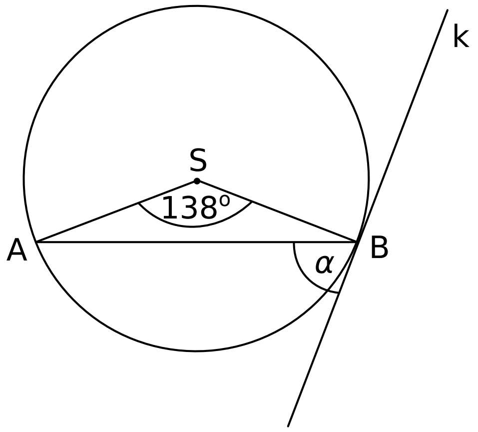


Łatwo też zauważyć, że kwadrat można pociąć na 8 trójkątów przystających od odciętych naroży. Zatem rzeczywiście pole trójkąta ABC stanowi połowę pola kwadratu.

Odpowiedź: P, P

ZADANIE 17 (1 PKT)

W okręgu o środku S zaznaczono kąt oparty na łuku AB. Przez punkt B poprowadzono prostą k styczną do okręgu.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Zaznaczony na rysunku kąt α zawarty między styczną k i cięciwą AB ma miarę

A) 21° B) 42° C) 48° D) 69°

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zauważmy, że trójkąt ABS jest równoramienny, więc

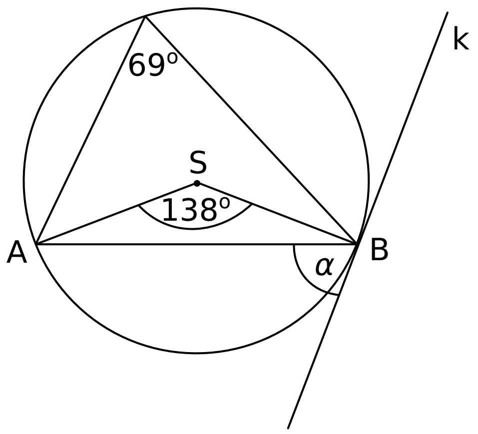
$$\measuredangle ABS = \frac{180^\circ - 138^\circ}{2} = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ.$$

Styczna k jest prostopadła do promienia SB, więc

$$\alpha = 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ.$$

Sposób II

Tym razem skorzystamy z twierdzenia o stycznej.



Na mocy tego twierdzenia interesujący nas kąt α między sieczną i styczną ma taką samą miarę jak kąt wpisany oparty na cięciwie AB. Stąd

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 138^\circ = 69^\circ.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Prostokąt o wymiarach $3\sqrt{3}$ cm i $5\sqrt{3}$ cm podzielono na 15 jednakowych kwadratów.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole jednego kwadratu jest równe
A) 1 cm^2 B) $\sqrt{3}\text{ cm}^2$ C) $\sqrt{45}\text{ cm}^2$ D) 3 cm^2

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Pole danego prostokąta jest równe

$$3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 15 \cdot (\sqrt{3})^2 = 15 \cdot 3 = 45.$$

W takim razie pole jednego z kwadratów na który podzielono prostokąt jest równe

$$\frac{45}{15} = 3\text{ cm}^2.$$

Sposób II

Prostokąt o bokach długości 3 cm i 5 cm składa się z 15 kwadratów o polu 1. Jeżeli teraz każdy z boków tego prostokąta pomnożymy przez $\sqrt{3}$, to otrzymamy prostokąt, o którym mowa w treści zadania. Składa się on więc z 15 kwadratów o boku $\sqrt{3}$ cm. Każdy z tych kwadratów ma więc pole 3 cm^2.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 19 (1 PKT)

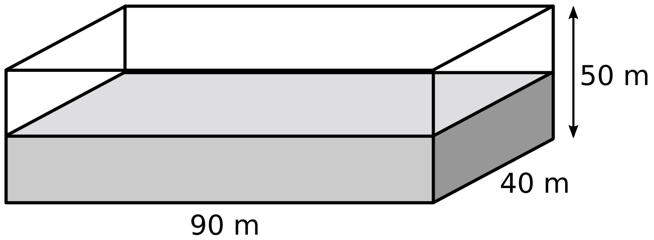
Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 90 cm, 40 cm, 50 cm wlano 40 litrów wody. **Ile litrów wody należy jeszcze dolać do akwarium, aby sięgała ona do połowy jego wysokości? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
A) 50 B) 70 C) 90 D) 140

ROZWIĄZANIE

Objętość akwarium o podanych wymiarach jest równa

$$90 \cdot 40 \cdot 50 \text{ cm}^3 = 180\,000 \text{ cm}^3 = 180 \text{ litrów}.$$

W takim razie połowa objętości akwarium to 90 litrów.

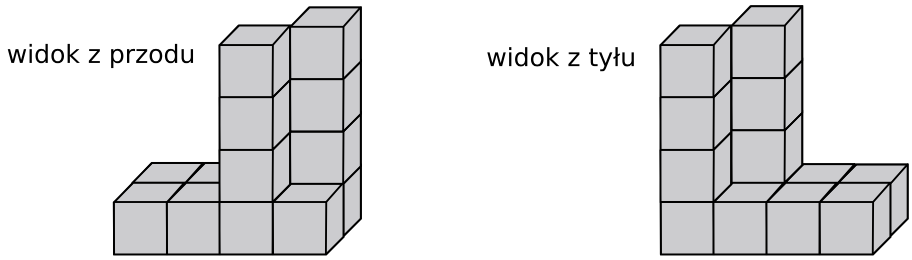


Do akwarium trzeba więc jeszcze dolać 50 litrów wody.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Jacek z 14 jednakowych sześciennych kostek skleił figurę, której widok z przodu i z tyłu przedstawiono na rysunkach.

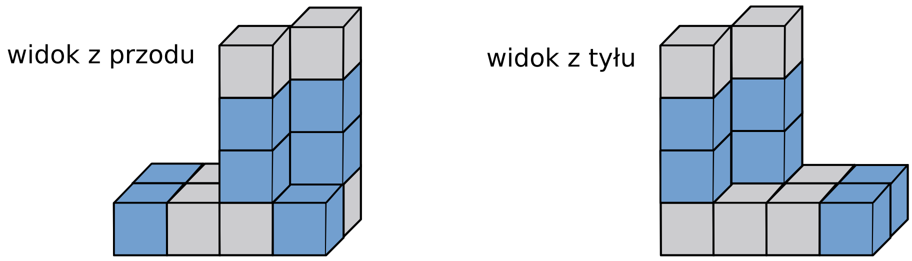


Całą figurę, również od spodu, Jacek pomalował. **Ile sześciennych kostek ma pomalowane dokładnie 4 ściany? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5

ROZWIĄZANIE

Sześciany z 4 pomalowanymi ścianami to te, które mają dwie ściany przyklejone do innych sześcianów. Takich sześcianów jest 7 – cztery z przodu i trzy z tyłu.



Odpowiedź: **B**

ZADANIE 21 (2 PKT)

Zapisano trzy różne liczby, których średnia arytmetyczna jest równa 4, oraz dwie inne liczby, których średnia arytmetyczna jest równa 2. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna zestawu tych pięciu liczb jest równa 3,2. Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Niech a, b, c będę pierwszymi trzema liczbami, a d, e dwoma pozostałymi. Wiemy zatem, że

$$\frac{a+b+c}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad a+b+c = 12$$
$$\frac{d+e}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad d+e = 4.$$

Średnia arytmetyczna wszystkich pięciu liczb jest więc równa

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = \frac{12+4}{5} = 3,2$$

ZADANIE 22 (3 PKT)

Do przewiezienia 27 ton żwiru potrzeba 5 małych i 2 dużych ciężarówek albo 3 małych i 3 dużych ciężarówek (przy wykorzystaniu całkowitej ich ładowności). Ile co najmniej kursów musi wykonać jedna duża ciężarówka, aby przewieźć 27 ton żwiru? Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Niech x oznacza ładowność małej, a y dużej ciężarówki. Wiemy zatem, że

$$\begin{cases} 27 = 5x + 2y \\ 27 = 3x + 3y. \end{cases}$$

Jeżeli podzielimy drugie równanie przez 3 to mamy $x + y = 9$. Podstawiamy teraz $x = 9 - y$ do pierwszego równania

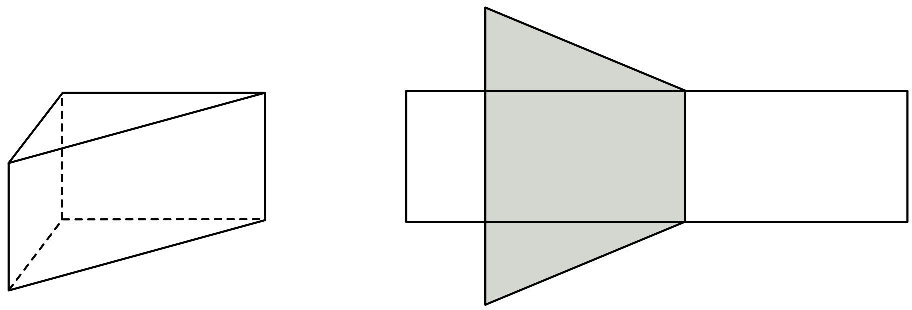
$$27 = 5(9-y) + 2y = 45 - 5y + 2y = 45 - 3y$$
$$3y = 18 \quad \Rightarrow \quad y = 6.$$

To oznacza, że duża ciężarówka musi wykonać co najmniej 5 kursów.

Odpowiedź: **Duża ciężarówka musi wykonać co najmniej 5 kursów.**

ZADANIE 23 (4 PKT)

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty o podstawie trójkąta prostokątnego i jego siatkę. Dwie dłuższe krawędzie podstawy graniastosłupa mają 12 cm i 13 cm długości, a pole zacieniowanej części siatki graniastosłupa jest równe 168 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

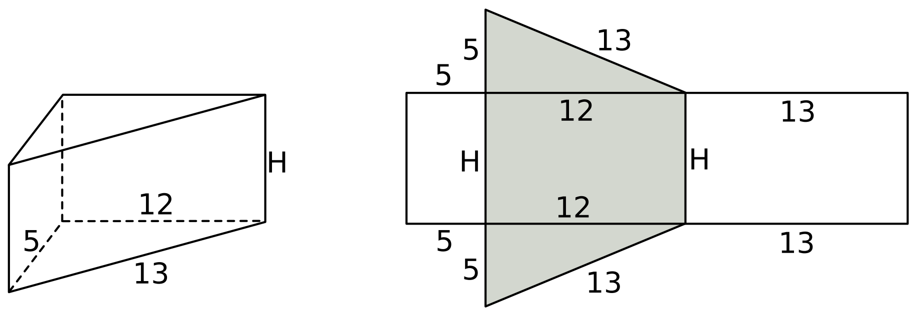


ROZWIĄZANIE

W podstawie graniastosłupa jest trójkąt prostokątny, więc trzecia krawędź podstawy graniastosłupa jest równa

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

Wysokość H graniastosłupa obliczymy z podanego pola zacieniowanego trapezu. Wysokość tego trapezu to długość dłuższej przyprostokątnej trójkąta w podstawie graniastosłupa, a jego podstawy mają długości H i $H + 5 + 5 = H + 10$.



Mamy zatem

$$\begin{aligned} 168 &= \frac{H + H + 10}{2} \cdot 12 = (H + 5) \cdot 12 \quad / : 12 \\ 14 &= H + 5 \quad \Rightarrow \quad H = 9. \end{aligned}$$

Objętość graniastosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{2} P_p \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 9 = 270 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: 270 $\mathbf{cm}^3$