PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

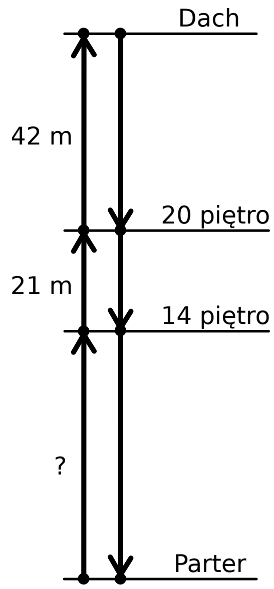
WWW.ZADANIA.INFO

16 KWIETNIA 2016

CZAS PRACY: 90 MINUT

Informacja do zadań 1 i 2

Każda z dwóch wind towarowych obsługujących nowo budowany wieżowiec porusza się z prędkością 1,2 km/h. Na schemacie zaznaczono niektóre długości trasy pokonywanej przez windy.



ZADANIE 1 (1 PKT)

Jak długo trwa przejazd windy między dachem, a 14 piętrem? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) 3 minuty B) 3 minuty i 9 sekund C) 6 minut i 18 sekund D) 4 minuty

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że winda porusza się z prędkością

$$1,2\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1,2\cdot\frac{1000}{60}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 20\cdot\frac{1}{60}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Dystans $42 + 21 = 63$ metrów winda przejedzie więc w czasie

$$\frac{63}{\frac{1}{3}} = 63 \cdot 3 = 189$$

sekund, czyli w czasie 3 minut i 9 sekund.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Winda zaczyna zjeżdżać z dachu o 1 minutę i 24 sekundy później niż winda wyjeżdżająca z parteru. Obie windy w tym samym momencie dojeżdżają do 20 piętra. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość trasy windy pomiędzy parterem, a 14 piętrem jest równa

A) 49 metrów B) 42 metry C) 36 metrów D) 52 metry

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że winda porusza się z prędkością

$$1,2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,2 \cdot \frac{1000}{60}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 20 \cdot \frac{1}{60}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Winda wjeżdżająca do góry jedzie do 20 piętra o 1 minutę i 24 sekundy dłużej niż winda zjeżdżająca z góry, więc pokonuje odległość większą o

$$84 \cdot \frac{1}{3} = 28$$

metrów. W takim razie odległość między parterem a 14 piętrem jest równa

$$42 + 28 - 21 = 49$$

metrów.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\frac{1}{2} + 2 \cdot 1,5^2 : 3$ jest równa

A) 2 B) 1,875 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{3}{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot 1,5^2 : 3 = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Jeżeli przyjmiemy, że $2^9 \approx 500$ i $3^9 \approx 20000$, to za przybliżenie liczby 60^9 możemy przyjąć

A) 10^{12} B) 10^8 C) 10^{15} D) 10^{16}

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że

$$6^9 = (2\cdot 3)^9 = 2^9 \cdot 3^9 \approx 500 \cdot 20000 = 5 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10000 = 10^7.$$

Stąd

$$(60)^9 = 10^9 \cdot 6^9 \approx 10^9 \cdot 10^7 = 10^{16}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dane jest przybliżenie $\sqrt{600} \approx 24,5$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

$\sqrt{24} \approx 4,9$	**P**	**F**
$\sqrt{150} \approx 6,125$	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt{24} = \sqrt{\frac{1}{25}\cdot 600} = \sqrt{\frac{1}{25}}\cdot\sqrt{600} \approx \frac{1}{5}\cdot 24,5 = 4,9.$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 600} = \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{600} \approx \frac{1}{2}\cdot 24,5 = 12,25.$$

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 6 (1 PKT)

W dodatniej liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest równa 7, a cyfra setek jest o 6 większa od cyfry jedności. Ile jest liczb spełniających te warunki?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A) Jedna. B) Dwie. C) Trzy. D) Cztery.

ROZWIĄZANIE

Z podanych informacji wynika, że interesująca nas liczba musi mieć postać $a7b$, gdzie $a = b + 6$. Są 4 liczby takiej postaci:

$$670,\ 771,\ 872,\ 973.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Pan Kazimierz po 10% podwyżce zarabia 2695 zł miesięcznie.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Przed podwyżką pan Kazimierz zarabiał

A) 2500 zł. B) 2350 zł. C) 2400 zł. D) 2450 zł.

ROZWIĄZANIE

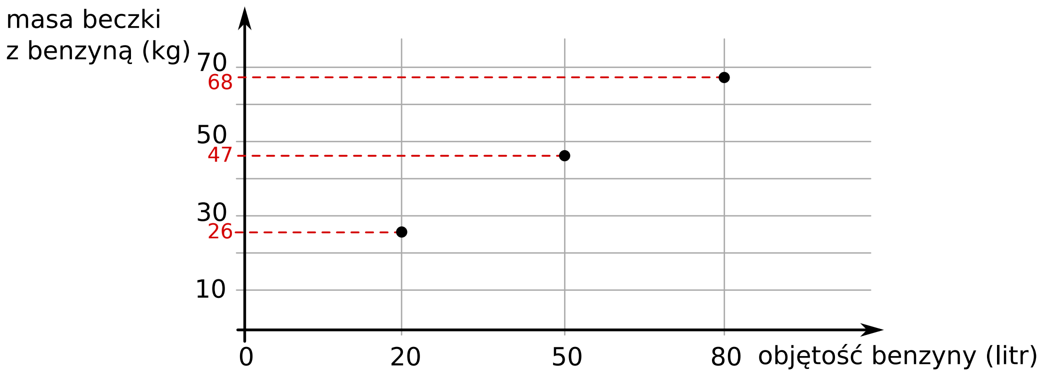
Oznaczmy przez x zarobki pana Kazimierza przed podwyżką. Mamy więc równanie

$$x \cdot 110\% = 2695$$
$$x \cdot \frac{11}{10} = 2695$$
$$x = 2695 \cdot \frac{10}{11} = 245 \cdot 10 = 2450.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Na wykresie przedstawiono, jak zmienia się masa beczki z benzyną w zależności od objętości wlanej do niej benzyny.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Beczka, do której nalano 100 litrów benzyny waży 82 kg.	**P**	**F**
Beczka waży 15 kg.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że $30 = 50 - 20$ litrów benzyny waży

$$47 - 26 = 21 \text{ kg}.$$

To oznacza, że 10 litrów benzyny waży $\frac{21}{3} = 7$ kg. To z kolei oznacza, że beczka waży

$$26 - 2 \cdot 7 = 26 - 14 = 12 \text{ kg}.$$

Beczka, do której nalano 100 litrów benzyny waży

$$12 + 10 \cdot 7 = 82 \text{ kg}.$$

Odpowiedź: **P, F**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Ania jest 4 razy starsza od Pawła. Za 8 lat Ania i Paweł będą mieli w sumie 38 lat.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Jeżeli przez x oznaczymy wiek Pawła, a przez y wiek Ani, to powyższą sytuację opisuje układ równań

A) $\begin{cases} x = 4y \\ x + y + 8 = 38 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y = 4x \\ x + y + 8 = 38 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x = 4y \\ x + y + 16 = 38 \end{cases}$ D) $\begin{cases} y = 4x \\ x + y + 16 = 38 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

Ania jest 4 razy starsza od Pawła, więc $y = 4x$. Za 8 lat Ania i Paweł będą mieli odpowiednio $y + 8$ i $x + 8$ lat. Razem będą więc mieli

$$x + y + 16 = 38.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Jeśli wypadnie orzeł, zapisujemy 6, a jeśli reszka – zapisujemy 4. Wynikiem doświadczenia jest zapisana liczba dwucyfrowa. **Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisana liczba jest podzielna przez 3? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

W wyniku opisanego doświadczenia możemy otrzymać 4 liczby:

$$44,\ 46,\ 64,\ 66.$$

Wśród tych liczb tylko 66 dzieli się przez 3, więc prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{4}$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Na most długości 200 m wjechała ciężarówka o długości 20 m. Ciężarówka porusza się z prędkością 36 km/h. Ile czasu upłynie od momentu wjazdu kabiny ciężarówki na most do momentu całkowitego zjechania ciężarówki z mostu?

Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 20 sekund B) 22 sekundy C) 200 sekund D) 24 sekundy

ROZWIĄZANIE

Zamieńmy najpierw prędkość ciężarówki z km/h na m/s.

$$36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 36\cdot\frac{1000}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{1000}{100}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Zauważmy teraz, że kabina ciężarówki od momentu wjechania na most do momentu, gdy cała ciężarówka opuści most przejedzie 220 m. Zajmie to jej więc 22 sekundy.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dwie spośród liczb a,b,c,d są dodatnie, a dwie ujemne.

Ile najwięcej liczb ujemnych może być pośród liczb $a-b,\ abc,\ \frac{c}{b},\ b-a,\ bc$**? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A) Dwie. B) Trzy. C) Cztery. D) Pięć.

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że liczby $a-b$ i $b-a$ różnią się znakiem, więc zawsze jedna z nich jest ujemna, a druga dodatnia. Liczby bc i $\frac{c}{b}$ mają zawsze ten sam znak. Jeżeli chcemy, żeby jak najwięcej z tych liczb było ujemnych, to musi być $bc < 0$ i $abc < 0$. Tak będzie np. dla $a = c = 1$ i $b = -1$. W tej sytuacji 4 spośród podanych liczb są ujemne.

Odpowiedź: **C**

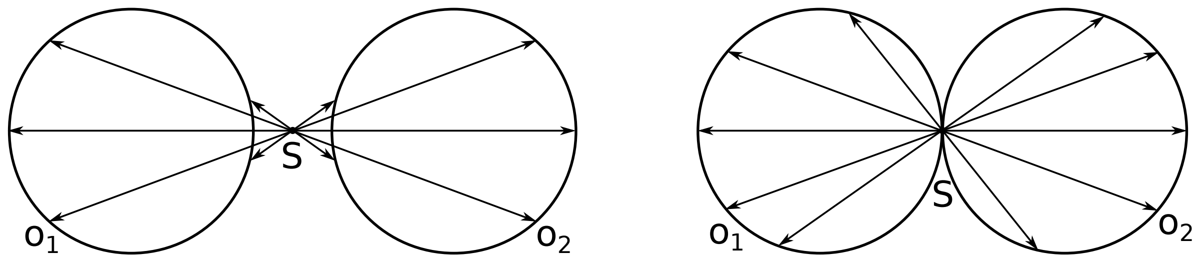
ZADANIE 13 (1 PKT)

Obrazem okręgu o_1 w symetrii względem punktu S jest okrąg o_2. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.**

Jeżeli okręgi o_1 i o_2 mają dwa punkty wspólne, to S leży na zewnątrz koła ograniczonego okręgiem o_1.	**P**	**F**
Jeżeli okręgi o_1 i o_2 mają jeden punkt wspólny, to S jest punktem okręgu o_1.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Z rysunku powinno być jasne, że jeżeli S leży na zewnątrz okręgu o_1, to o_1 i o_2 będą rozłączne. Jeżeli natomiast okręgi o_1 i o_2 są styczne, to S musi być ich punktem styczności.

Odpowiedź: **F, P**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Jeżeli a, b i c są długościami boków trójkąta oraz c jest jego najdłuższym bokiem, to ten trójkąt jest:
– prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$
– rozwartokątny, gdy $a^2 + b^2 < c^2$
– ostrokątny, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Z odcinków o długościach: $2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2},\ 3\sqrt{3}$
A) nie można zbudować trójkąta.
B) można zbudować trójkąt prostokątny.
C) można zbudować trójkąt rozwartokątny.
D) można zbudować trójkąt ostrokątny.

ROZWIĄZANIE

Sprawdźmy najpierw, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt – w tym celu musimy sprawdzić, czy najdłuższy z nich jest krótszy od sumy dwóch pozostałych. Tak jednak jest, bo

$$3\sqrt{3} < 3\cdot 2 = 6$$
$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} > 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} > 5\cdot 1,4 = 7.$$

Ponieważ

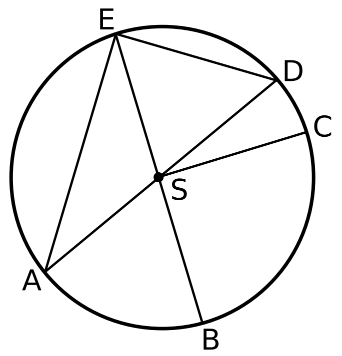
$$(2\sqrt{3})^2 = 12,\ (3\sqrt{2})^2 = 18,\ (3\sqrt{3})^2 = 27$$

i $12 + 18 > 27$, to z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt ostrokątny.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Który z zaznaczonych kątów jest kątem środkowym?
Zaznacz poprawną odpowiedź.



A) DEB B) AED C) ASC D) EAS

ROZWIĄZANIE

Wśród podanych kątów jedynie ASC jest kątem środkowym (tzn. ma wierzchołek w środku okręgu).

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 16 (1 PKT)

W poniższej tabeli zebrano zarobki wszystkich pracowników pewnej firmy handlowej.

Imię pracownika	Zarobki
Kamila, Krzysztof, Stefan	2800 zł
Zofia, Łukasz	3000 zł
Ela, Marta	3200 zł
Henryk	3600 zł.

Jaka jest średnia zarobków pracowników tej firmy? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 3050 zł B) 3150 zł C) 3200 zł D) 3250 zł

ROZWIĄZANIE

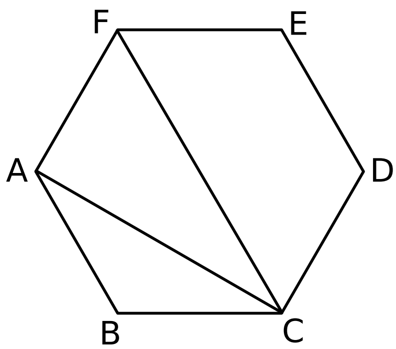
Wszystkich pracowników jest 8, więc średnia ich zarobków jest równa

$$\frac{2800\cdot 3+3000\cdot 2+3200\cdot 2+3600}{8}=350\cdot 3+375\cdot 2+400\cdot 2+450=3050.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku równym 1 cm.

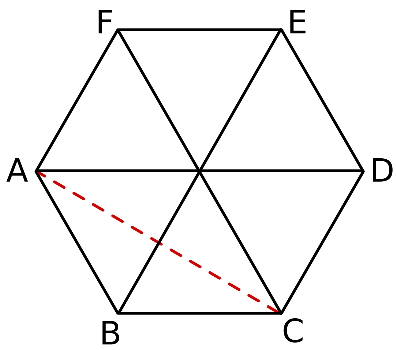


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Przekątna AC ma długość $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	**P**	**F**
Przekątna CF ma długość $\sqrt{3}$.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Sześciokąt foremny składa się z 6 przystających trójkątów równobocznych.



W szczególności przekątna AC ma długość dwa razy większą niż długość wysokości trójkąta równobocznego o boku 1 cm. Ze wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym

$$AC = 2h = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Ponadto

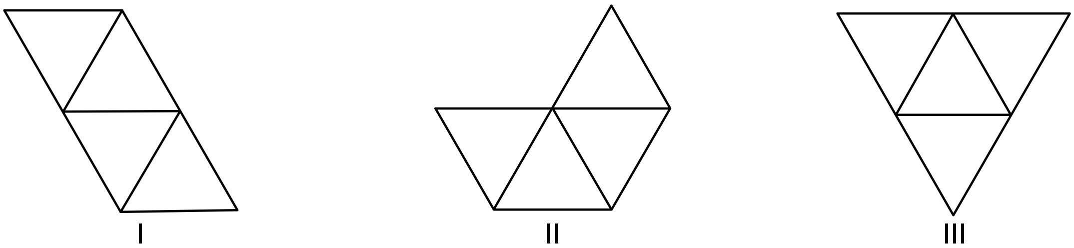
$$CF = 2BC = 2.$$

Odpowiedź: **F, F**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Rysunki przedstawiają bryłę, której wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi.

Które wielokąty – I, II, III – przedstawiają siatki bryły takiej, jaką pokazano na powyższych rysunkach? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



A) I, II i III B) tylko I i III C) tylko II i III D) tylko I i II

ROZWIĄZANIE

Rysunek II nie może przedstawiać siatki czworościanu, bo w środkowym wierzchołku spotykają się 4 ściany. Pozostałe rysunki przedstawiają prawidłowe siatki czworościanu foremnego.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 19 (1 PKT)

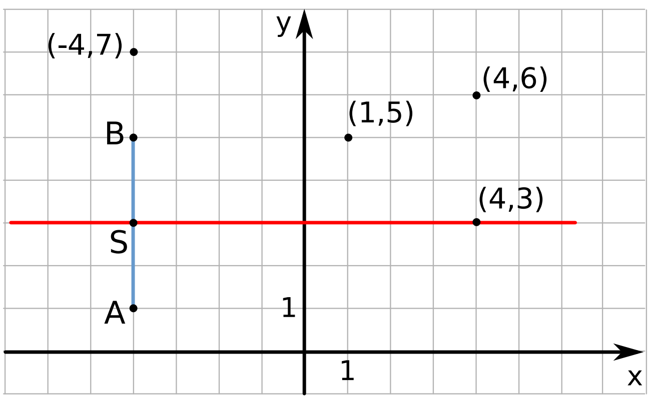
Końce odcinka AB mają współrzędne $A = (-4, 1)$ i $B = (-4, 5)$. **Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.**

Na symetralnej odcinka AB leży punkt o współrzędnych

A) $(-4, 7)$ B) $(1, 5)$ C) $(4, 6)$ D) $(4, 3)$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.

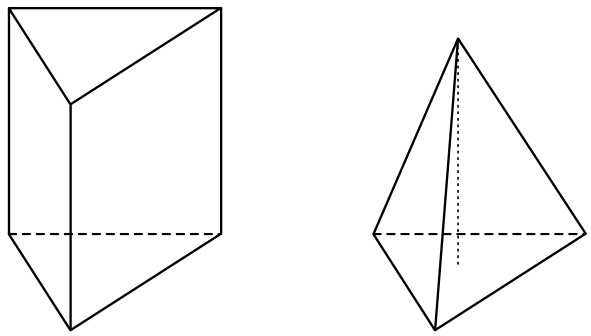


Z rysunku powinno być jasne, że środkiem odcinka AB jest punkt $S = (-4,3)$. Symetralną odcinka AB tworzą więc punkty o drugiej współrzędnej równej 3. Wśród podanych punktów jest tylko jeden spełniający ten warunek: $(4,3)$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy trójkątny oraz graniastosłup prawidłowy trójkątny. Bryły mają jednakowe podstawy i równe wysokości, a iloczyn objętości tych brył jest równy 48 cm^6.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Objętość ostrosłupa jest równa 12 cm^3.	**P**	**F**
Objętość graniastosłupa jest trzy razy większa od objętości ostrosłupa.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez P_p pole podstawy, a przez H wysokość danych brył. Objętości graniastosłupa i ostrosłupa są odpowiednio równe

$$V_g = P_p \cdot H$$
$$V_o = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3}V_g.$$

Z podanego iloczynu objętości mamy ponadto

$$48 = V_g \cdot V_o = V_g \cdot \frac{1}{3}V_g \quad / \cdot 3$$
$$144 = V_g^2 \quad \Rightarrow \quad V_g = 12 \text{ cm}^3.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$\frac{1}{3}V_g = 4 \text{ cm}^3.$$

Odpowiedź: **F, P**

ZADANIE 21 (4 PKT)

Suma cyfr liczby trzycyfrowej podzielnej przez 5 jest równa 15. Jeśli zapiszemy cyfry tej liczby w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę o 198 większą od początkowej. Wyznacz liczbę początkową.

ROZWIĄZANIE

Skoro szukana liczba dzieli się przez 5, to jej cyfrą jedności musi być 0 lub 5. Nie może to jednak być 0, bo wtedy liczba otrzymana przez zapisanie cyfr w odwrotnej kolejności będzie mniejsza od wyjściowej liczby. Zatem szukamy liczby postaci $100x + 10y + 5$. Z podanych informacji mamy układ równań

$$\begin{cases} x + y + 5 = 15 \\ 500 + 10y + x = 100x + 10y + 5 + 198 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie

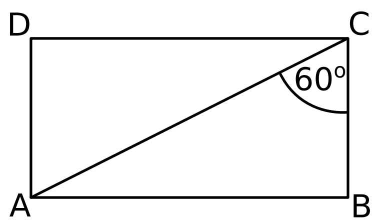
$$\begin{aligned} & 500 + 10y + x = 100x + 10y + 5 + 198 \\ & 297 = 99x \quad \Rightarrow \quad x = 3. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania układu mamy $y = 10 - x = 10 - 3 = 7$. Zatem szukana liczba to 375.

Odpowiedź: **375**

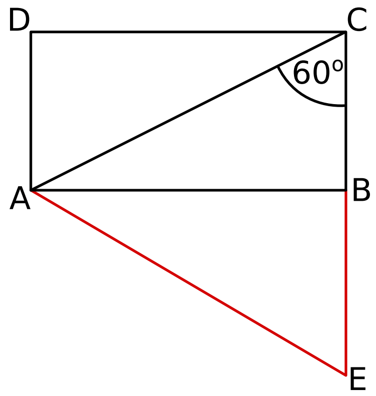
ZADANIE 22 (2 PKT)

Przekątna prostokąta $ABCD$ nachylona jest do jednego z jego boków pod kątem 60°. Uzasadnij, że pole prostokąta $ABCD$ jest równe polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta.



ROZWIĄZANIE

Trójkąt prostokątny ABC jest połówką trójkąta równobocznego AEC o boku równym przekątnej prostokąta, więc jego pole jest równe połowie pola trójkąta AEC.



W takim razie

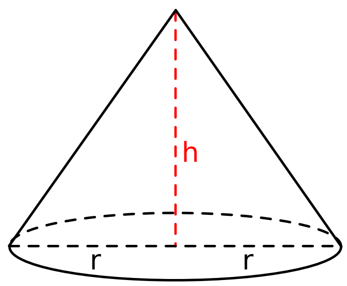
$$P_{ABCD} = 2P_{ABC} = P_{AEC}.$$

ZADANIE 23 (4 PKT)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $16\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy stożek. Oznaczmy przez r promień jego podstawy, a przez h jego wysokość.



Z podanego pola przekroju mamy

$$\begin{aligned} 16\sqrt{3} &= \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} \\ 16\sqrt{3} &= r^2\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3} \\ 16 &= r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 4. \end{aligned}$$

Liczymy teraz pole powierzchni całkowitej stożka.

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = 16\pi + 32\pi = 48\pi.$$

Zanim obliczymy objętość, obliczamy wysokość stożka – korzystamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego.

$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Pozostało obliczyć objętość stożka.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Odpowiedź: $P_c = 48\pi,\ V = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$