PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

21 KWIETNIA 2012

CZAS PRACY: 90 MINUT

ZADANIE 1 (1 PKT)

Która równość jest fałszywa? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{12} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$ C) $\sqrt{12} = \sqrt{24} : \sqrt{2}$ D) $\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{6 \cdot 2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$$
$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{24}{2}} = \sqrt{12}.$$

Równość $\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ jest natomiast fałszywa.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Jabłka i gruszki pakowano do pojemników, przy czym do jednego pojemnika wkładano 64 gruszki lub 80 jabłek. Po zapakowaniu owoców okazało się, że zapakowano dokładnie tyle samo jabłek, co gruszek.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba pojemników, do których zapakowano te owoce? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 5 B) 18 C) 9 D) 4

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez n liczbę zapakowanych jabłek, to n jest też liczbą zapakowanych gruszek. Liczba n musi się dzielić przez 64 i przez 80, więc jej najmniejsza możliwa wartość to najmniejsza wspólna wielokrotność 64 i 80. Zauważmy, że

$$64 = 16 \cdot 4$$
$$80 = 16 \cdot 5.$$

Zatem najmniejsza możliwa wartość n to

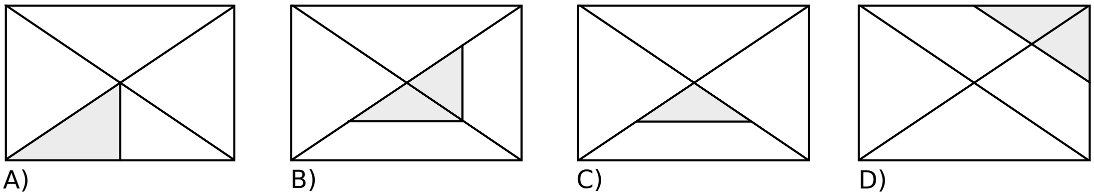
$$16 \cdot 4 \cdot 5 = 320.$$

Do zapakowania jabłek użyto więc $\frac{320}{80} = 4$ pojemników, a do zapakowania gruszek $\frac{320}{64} = 5$ pojemników. W sumie użyto więc $4 + 5 = 9$ pojemników.

Odpowiedź: **C**

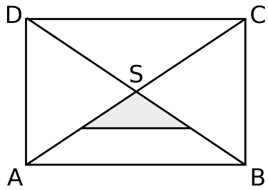
ZADANIE 3 (1 PKT)

Na którym rysunku zamalowano $\frac{1}{16}$ figury? **Zaznacz poprawną odpowiedź.**



ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąt zaznaczony na rysunku C jest dwa razy mniejszy (w sensie długości boków) od trójkąta ABS, czyli jego pole jest 4 razy mniejsze od pola trójkąta ABS.



Z kolei pole trójkąta ABS to $\frac{1}{4}$ pola prostokąta, czyli pole trójkąta zaznaczonego na rysunku C stanowi $\frac{1}{16}$ pola prostokąta.

Łatwo sprawdzić, że na pozostałych rysunkach zaznaczono $\frac{1}{8}$ pola prostokąta.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a potem jeszcze o 50%.
O ile procent cena po obniżkach jest niższa od ceny początkowej? Zaznacz dobrą odpowiedź.

A) 65% B) 80% C) 35% D) 70%

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez x cenę wyjściową towaru. Zatem po pierwszej obniżce cena wynosiła

$$70\%x = 0,7x.$$

Po kolejnej obniżce cena wynosiła

$$50\% \cdot 0,7x = 0,5 \cdot 0,7x = 0,35x = 35\%x.$$

Zatem cena została łącznie obniżona o 65%.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Jeden litr to 1000 cm^3. **Dokończ zdanie. Zaznacz dobrą odpowiedź.**
Jeden metr sześcienny to
A) 100 litrów B) 1000 litrów C) 10000 litrów D) 10 litrów

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$1 \text{ m}^3 = (100)^3 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ l}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Które zdanie jest fałszywe? Wybierz odpowiedź spośród podanych.
A) Jeżeli iloczyn liczb x i y jest dodatni, to liczby te mają taki sam znak.
B) Jeżeli iloczyn liczb x i y jest równy zero to liczby te są równe zero.
C) Jeżeli iloczyn liczb x i y jest ujemny to liczby te mają różne znaki.
D) Jeżeli suma liczb x i y jest równa zero to ich iloczyn jest niedodatni.

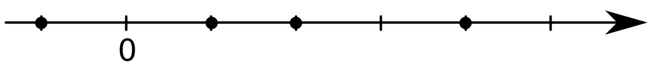
ROZWIĄZANIE

Jeżeli $xy > 0$ to liczby x i y muszą obie dodatnie lub obie ujemne.
Jeżeli $x = y = 0$ to przynajmniej jedna z tych liczb musi być równa 0, ale druga może być niezerowa.
Jeżeli $xy < 0$ to jedna z tych liczb musi być ujemna, a druga dodatnia.
Jeżeli $x + y = 0$ to $xy = x(-x) = -x^2 \leqslant 0$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono oś liczbową, na której kropkami zaznaczono cztery liczby.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn dwóch spośród zaznaczonych liczb jest równy iloczynowi dwóch pozostałych.	**P**	**F**
Suma dwóch spośród zaznaczonych liczb jest równa sumie dwóch pozostałych.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Ponieważ jedna z zaznaczonych liczb jest ujemna, a trzy dodatnie, przy każdym połączeniu liczb w dwie pary, iloczyn liczb w jednej parze jest ujemny, a w drugiej dodatni.

Na osi nie jest podpisana jednostka, ale widać, że zaznaczone liczby są postaci

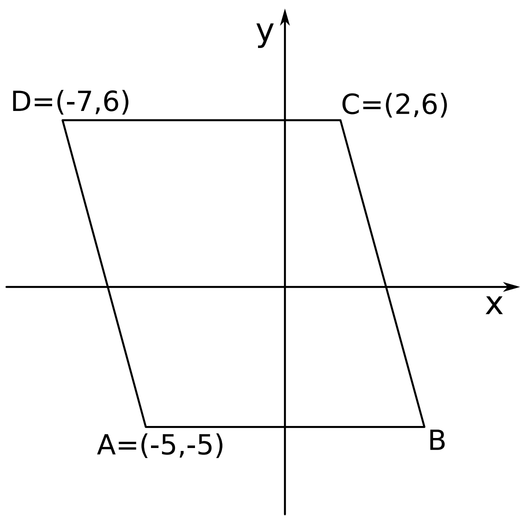
$$a = -1\,\text{j},\ b = 1\,\text{j},\ c = 2\,\text{j},\ d = 4\,\text{j}.$$

W takim razie $a + d = b + c$.

Odpowiedź: F, P

ZADANIE 8 (1 PKT)

Zaznacz poprawną odpowiedź.
Wierzchołek B równoległoboku $ABCD$ ma współrzędne



A) $(3, -5)$ B) $(4, -5)$ C) $(-5, 4)$ D) $(5, -5)$

ROZWIĄZANIE

Druga współrzędna punktu B musi być taka sam jak druga współrzędna punktu A, czyli musi być równa -5. Ponadto, $|AB| = |DC| = 9$. Zatem pierwsza współrzędna punktu B mus być równa 4, czyli $B = (4, -5)$.

Odpowiedź: B

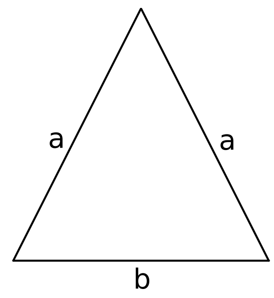
ZADANIE 9 (1 PKT)

Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.
W trójkącie równoramiennym o obwodzie 31 cm ramię jest dłuższe od podstawy o 5 cm. Ramię tego trójkąta ma długość

A) 24 cm B) 12 cm C) 7 cm D) 6 cm

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy trójkąt równoramienny.



Wiemy, że

$$\begin{cases} 2a + b = 31 \\ a = b + 5. \end{cases}$$

Podstawiamy $b = a - 5$ z drugiego równania do pierwszego.

$$2a + a - 5 = 31$$
$$3a = 36 \quad / : 3$$
$$a = 12.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Dana jest funkcja określona wzorem $y = -\sqrt{-x}$, gdzie x jest liczbą ujemną.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Wartości tej funkcji są zawsze dodatnie.	**P**	**F**
Punkt $(-9, 3)$ należy do wykresu tej funkcji.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

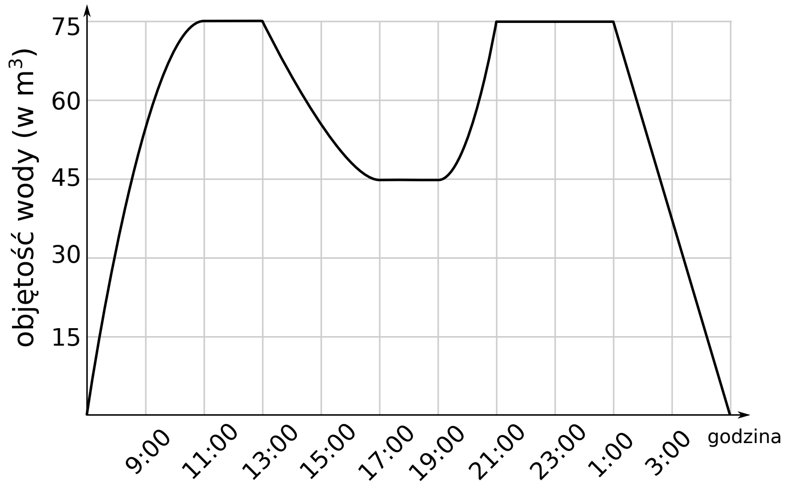
Jeżeli $x < 0$ to $-x > 0$ oraz $\sqrt{-x} > 0$. Zatem $-\sqrt{-x} < 0$.
Ponieważ $f(-9) = -\sqrt{9} = -3$, punkt $(-9, 3)$ nie leży na wykresie funkcji (bo na wykresie leży punkt $(-9, -3)$).

Odpowiedź: **F, F**

Informacja do zadań 11 – 13

W trakcie kontroli jakości basenu rekreacyjnego napełniono go całkowicie wodą. Po pewnym czasie w basenie wykryto usterkę i częściowo go opróżniono. Następnie usterkę usunięto i basen ponownie napełniono wodą. Na zakończenie kontroli basen całkowicie opróżniono z wody.

Na wykresie przedstawiono jak zmieniała się w czasie kontroli objętość wody w basenie.



ZADANIE 11 (1 PKT)

Ile wody spuszczono z basenu po wykryciu usterki? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 30 m^3 B) 45 m^3 C) 75 m^3 D) 35 m^3

ROZWIĄZANIE

Z wykresu widać, że spuszczono

$$75 - 45 = 30 \text{ m}^3$$

wody.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Na podstawie podanych informacji wybierz zdanie prawdziwe.

A) W trakcie kontroli więcej czasu poświęcono na napełnianie basenu, niż na jego opróżnianie.
B) Kontrola basenu trwała 11 godzin.
C) Częściowe opróżnienie basenu po wykryciu usterki trwało dłużej niż jego ponowne napełnienie po jej naprawieniu.
D) Basen był całkowicie wypełniony wodą przez 3 godziny.

ROZWIĄZANIE

Sprawdzamy po kolei.
Na napełnianie basenu poświęcono $4+2=6$ h, na jego opróżnianie $4+4=8$ h.
Kontrola basenu trwała 22 godziny.
Po wykryciu usterki basen opróżniono w 4 godziny, a ponownie napełniono w 2 godziny.
Basen był całkowicie wypełniony wodą przez $2+4=6$ h.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.
Podczas końcowego opróżniania basenu, $\frac{1}{3}$ objętości wody usunięto w ciągu

A) 80 minut B) 40 minut C) 60 minut D) 70 minut

ROZWIĄZANIE

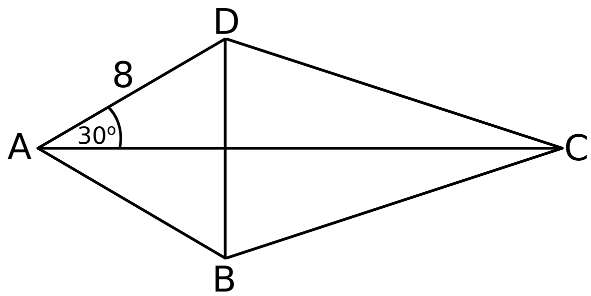
Podczas końcowego opróżniania basenu, 75 m^3 wody usunięto w 4 godziny. W takim razie 25 m^3 usunięto w

$$\frac{1}{3}\cdot 4 \text{ h} = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 60 \text{ min} = 80 \text{ min}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Dokończ poniższe zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.
Długość przekątnej BD deltoidu przedstawionego na rysunku jest równa



A) 9 B) 8 C) $8\sqrt{3}$ D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że przy oznaczeniach z rysunku, prosta AC jest dwusieczną kąta BAD. Zatem $\measuredangle BAD = 60^\circ$. To oznacza, że trójkąt równoramienny ABD jest równoboczny. Zatem

$$BD = AD = 8.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 15 (1 PKT)

W pudełku znajduje się 30 losów, w tym 5 losów wygrywających i 25 losów przegrywających. Po wyciągnięciu los nie jest zwracany do pudełka. Ania wybrała pięć losów i wszystkie były przegrywające. Po Ani jeden los wyciągnął Kuba.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że Kuba wyciągnął los przegrywający? Wybierz dobrą odpowiedź.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{6}$

ROZWIĄZANIE

Po losowaniu Ani w pudełku zostało 25 losów, w tym 20 przegrywających. Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Z zestawu liczb: 2, 6, 10, 14, 18 usunięto jedną liczbę. Mediana pomniejszonego zestawu wynosi 12.

Którą z poniższych liczb usunięto? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 18 B) 14 C) 10 D) 6

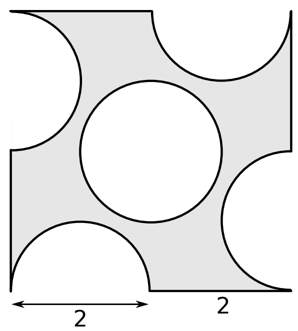
ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że po usunięciu jednej liczby medianę będziemy liczyć ze zbioru składającego się z 4 liczb. Mediana będzie więc średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb. Średnia arytmetyczna 10 i 14 to 12, więc musimy usunąć 2 lub 6. Nie ma odpowiedzi 2, więc musiano usunąć 6.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Z płytki w kształcie kwadratu o boku długości 4 cm wycięto cztery półkola o średnicy 2 cm i jedno koło o średnicy 2 cm.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Pole otrzymanej figury jest równe $16-3\pi$ cm^2	**P**	**F**
Obwód otrzymanej figury jest równy $6\pi+8$ cm	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

W sumie z kwadratu wycięto 3 koła o średnicy 2 cm, pole pozostałej figury jest więc równe

$$4^2-3\cdot\pi\cdot1^2=16-3\pi.$$

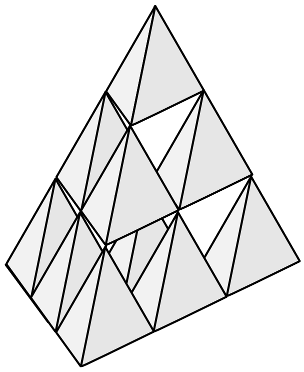
Na obwód figury składają się w sumie 3 okręgi o średnicy 2 oraz 4 odcinki długości 2. Obwód jest więc równy

$$3\cdot2\pi\cdot1+4\cdot2=6\pi+8.$$

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Z jednakowych czworościennych klocków ułożono bryłę mającą kształt czworościanu foremnego.



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Utworzona bryła składa się z 10 klocków.	**P**	**F**
Czworościan foremny o wymiarach takich jak utworzona figura ma objętość 27 razy większą od objętości jednego klocka.	**P**	**F**

ROZWIĄZANIE

Klocków jest

$$6+3+1=10$$

(6 na dole, 3 wyżej i jeden na samej górze).

Czworościan o wymiarach takich jak utworzona bryła jest trzy razy większy od jednego klocka. Jego objętość jest więc $3^3=27$ razy większa.

Odpowiedź: **P, P**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Do każdego z 27 pojemników wrzucono piłkę niebieską lub zieloną, a do niektórych z nich wrzucono dwie piłki: niebieską i zieloną. Piłki zielone wrzucono do 15 pojemników, a piłki niebieskie do 16 pojemników.

Do ilu pojemników wrzucono dwie piłki? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

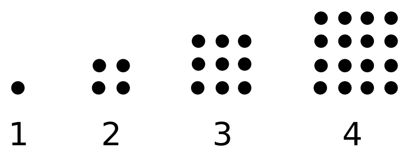
ROZWIĄZANIE

Wrzucamy do 15 pojemników piłki zielone, a do pozostałych $27 - 15 = 12$ piłki niebieskie. Wciąż mamy do wrzucenia $16 - 12 = 4$ piłki niebieskie – musimy je dorzucić do piłek zielonych. Zatem w 4 pojemnikach znajdują się dwie piłki.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Z czarnych krążków układane są figury w kształcie kwadratu, według reguły przedstawionej na rysunku.



O ile więcej krążków będzie w figurze numer 12 niż w figurze numer 10? Zaznacz dobrą odpowiedź.

A) 144 B) 44 C) 42 D) 40

ROZWIĄZANIE

W figurze numer 12 będą $12^2 = 144$ krążki, a figurze numer 10 będzie $10^2 = 100$ krążków. W pierwszej z nich jest więc o 44 krążki więcej.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 21 (3 PKT)

Lena posiada pewną liczbę banknotów dwudziestozłotowych i pewną liczbę banknotów dziesięciozłotowych. W sumie banknoty te składają się na kwotę 620 zł. Gdyby połowę banknotów dziesięciozłotowych zamienić na banknoty dwudziestozłotowe, to łączna wartość banknotów wzrosłaby do 750 zł. Ile banknotów dziesięciozłotowych i ile banknotów dwudziestozłotowych posiada Lena? Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x i y odpowiednio liczby banknotów dziesięciozłotowych i dwudziestozłotowych. Z podanych informacji otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 10x + 20y = 620 \quad / : 10 \\ 10 \cdot \frac{x}{2} + 20 \cdot \left(y + \frac{x}{2}\right) = 750 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 62 \\ 5x + 20y + 10x = 750. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 62 \\ 15x + 20y = 750 \quad / : 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 62 \\ 3x + 4y = 150. \end{cases}$$

Podstawiamy teraz $x = 62 - 2y$ z pierwszego równania do drugiego.

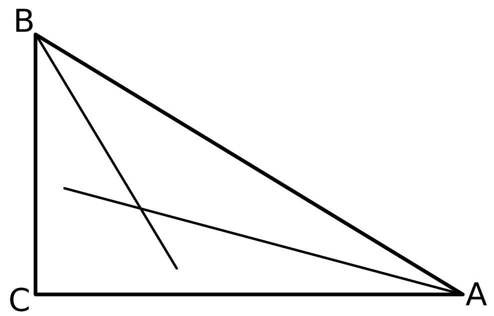
$$\begin{aligned} &3(62 - 2y) + 4y = 150 \\ &186 - 6y + 4y = 150 \\ &36 = 2y \quad / : 2 \\ &y = 18. \end{aligned}$$

Stąd $x = 62 - 2y = 62 - 36 = 26$.

Odpowiedź: **26 i 18**

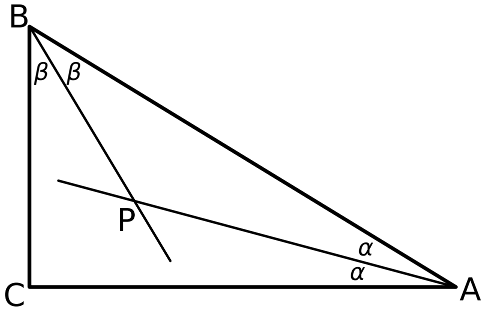
Zadanie 22 (3 pkt)

Uzasadnij, że kąt ostry między dwusiecznymi kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy 45°.



Rozwiązanie

Oznaczmy $\measuredangle BAC = 2\alpha$ i $\measuredangle CBA = 2\beta$.



W takim razie $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$, czyli $\alpha + \beta = 45^\circ$ (bo suma kątów w trójkącie ABC jest równa 180°).

Patrzymy teraz na trójkąt APB.

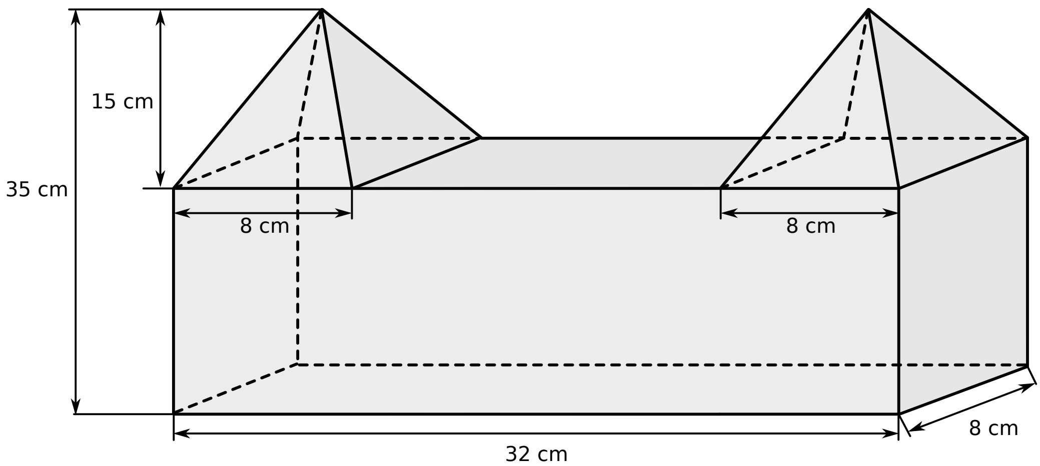
$$\measuredangle APB = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

W takim razie kąt ostry między dwusiecznymi ma miarę

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

ZADANIE 23 (4 PKT)

Oblicz objętość bryły, której kształt i wymiary przedstawiono na rysunku. Zapisz obliczenia.



ROZWIĄZANIE

Bryła przedstawiona na rysunku składa się z prostopadłościanu o wysokości $35 - 15 = 20$ cm i dwóch ostrosłupów.

Objętość prostopadłościanu jest równa

$$32 \cdot 8 \cdot 20 = 5120 \text{ cm}^3,$$

a objętość ostrosłupa wynosi

$$\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 15 = 320 \text{ cm}^3.$$

Objętość całej bryły jest więc równa

$$5120 + 2 \cdot 320 = 5760 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: 5760 $\mathbf{cm}^3$